Cuerpos y figuras geométricas

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

MODALIDAD

MIXTA

ESPECIALIDAD

Matemáticas

5°
Semestre

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
SEP

GOBIERNO DEL ESTADO DE CHIHUAHUA

SECRETARIA DE EDUCACION Y CULTURA

Lic. Guadalupe Chacón Monarres

DIRETORA DE DESARROLLO EDUCATIVO

Profra. Emma Lilia Miramontes Parra

JEFE DEL DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN Y ACTUALIZACIÓN DE DOCENTES

Profr. Carlos Enrique Armendáriz Gutiérrez

DIRECTOR DE LA ESCUELA NORMAL SUPERIOR "PROF. JOSÉ E. MEDRANO R"

Profr. Manuel Alberto Navarro Weckmann

SUBDIRECTOR ACADÉMICO:

Profr. Leobardo Alvarado

DEPARTAMENTO DE PROGRAMAS Y MATERIALES

Profr. Roberto Cid Guzmán

Elaborado:

Profr. José Luis Anguiano Valles

Diseño de programa:

Secretaria de Educación Pública.

Temario

Bloque I. Figuras en el plano.

Temas

1. Las figuras en el plano euclidiano
2. Construcciones con regla y compás
    - El triángulo
    - El circulo
3. Análisis de figuras planas
4. Diferentes estrategias para el cálculo de áreas
    - Retículas
    - Triangulación
    - Medición de superficies y/o perimetros de figuras cualesquiera
    - Generalizaciones

Bloque II. Simetrías

Temas

1. Simetria axial
2. Simetria radial
3. Isometrias

Bloque III. Los sólidos

Temas

1. Los sólidos geométricos, características y propiedades
2. Construcción y análisis de sólidos
    - Prismas
    - Cristalografía
    - Estructuras que se apoyan en sólidos
3. Los sólidos regulares

INDICE

INTRODUCCION.

Las personas desarrollan de manera natural gran cantidad de conocimientos geométricos.

Que son adquiridos desde la infancia y tienen su origen en la capacidad de los seres humanos para observar y reconocer las características exteriores de los objetos y comparar formas y tamaños.

Se pueden distinguir algunas áreas de la geometria tales como la empírica, deductiva, axiometrica, las cuales en el proceso enseñanza – aprendizaje se tiene la necesidad de comprender que la geometría involucra tres clases de procesos cognitivos que cumplen con funciones epistemológicas específicas: el proceso de visualización, construcción y razonamiento.

Entender que los procesos cognitivos de los adolescentes son distintos de los adultos eso significa percibir, por un lado, como se están desenvolviendo, entre otras, las capacidades de pensamiento abstracto y formal para generalizar, construir procesos, elaborar hipótesis y operar con símbolos.

La geometría, puede ayudar al hombre en sus actividades diarias facilitándole la vida a través de los elementos que le rodean.

En general, podemos afirmar que, para el hombre de nuestros días, la geometría es imprescindible, su entendimiento y uso son esenciales.

PROPOSITOS GENERALES

Al termino del estudio de los contenidos de este programa se espera que los estudiantes normalistas.

Adquieran bases sólidas en relación a la geometría euclidiana, conociendo parte de su historia y los elementos básicos que le permitan abordar los siguientes cursos de la especialidad con una lógica segura.

Adquieran y desarrollen elementos para analizar situaciones relacionadas con la geometría, ya no solo para explicar un procedimiento sino para prevenir la respuesta del alumno de secundaria y proveerle de alternativas distintas de solución.

Desarrollen habilidades para resolver problemas en diferentes contextos, con base en el conocimiento conceptual, de hechos básicos y algorítmicos.

Desarrollen habilidad de medir, trazar, imaginar relaciones geométricas y espaciales así como poder calcular.

Desarrollen sus actitudes de investigación, colaboración y respeto.

ORGANIZACIÓN DE LOS CONTENIDOS.

El estudio de esta asignatura se organiza alrededor de 3 bloques fundamentales.

Aun cuando cada eje se presente por separado, es importante mencionar que estos están conectados y relacionados en la práctica de la geometría.

a) Figuras en el plano.
b) Simetrías
c) Sólidos

Entender y conocer el desarrollo histórico de la geometria así como sus formas básicas y poder hacer sus trazos con seguridad y confianza.

Donde la propia naturaleza muestra el efecto simétrico lo cual nos facilita entender y explicar de forma sencilla y clara la cristalización de los elementos en su micro estructura así como en la macro estructura, dándonos la facilidad de analizar y calcular sus formas.

Las actividades que se presentan son vistas como ejemplos tipificados que los maestros pueden utilizar para llevar a cabo su estudio; se trata que se tomen como punto de referencia para construir y diseñar otros tipos de problemas o extensiones.

En cada bloque se identifica un conjunto de contenidos que el maestro debe atender durante la aplicación de las actividades sugeridas y que los profesores responsables de conducir el curso pueden enriquecer con base en su experiencia.

Se agregan algunas lecturas, acertijos y direcciones de Internet de tal forma que el curso presente una variedad de elementos los cuales le permitan al alumno disponer y manejar diferentes estrategias.

ORIENTACIONES DIDACTICAS

Un principio fundamental en el estudio de la geometría es que el salón de clase se trasforme en un medio donde el estudiante tenga oportunidad de reflexionar sobre su aprendizaje de la disciplina, es decir, que las actividades que estudia se conviertan en un vehículo para que el estudiante, constantemente, se plantee y discuta preguntas, que cuestione porque las cosas se presentan de cierta forma.

Esto significa que las actividades deben presentarse en forma de problemas o preguntas en los que los estudiantes tengan la oportunidad de reflexionar, abordar y resolver una serie de interrogantes relacionadas directamente con el tema de estudio. Con esta perspectiva, el estudiante tendrá más elementos para investigar y analizar soluciones, resolver incompatibilidades y rediseñar o formular nuevos problemas.

Una de las tareas fundamentales del maestro consiste en propiciar en el salón de clase un espacio de dialogo constante donde se problematice el estudio de la geometría. La actividad central es la discusión de los procedimientos que puedan ayudar a resolver los problemas o preguntas que emergen de la interacción del estudiante con la situación. Analizar la pertinencia de los procedimientos y evaluar el potencial particular o general de estos son actividades que ayudan a construir y mantener una actitud critica en el salón de clase. El papel del maestro es seleccionar y presentar las tareas que ayuden a problematizar la disciplina por parte de los estudiantes. En tal sentido, es importante que tenga en consideración los conocimientos y habilidades con que cuentan los estudiantes.

Por otro lado, los estudiantes deben compartir los resultados de sus exploraciones y presentar justificaciones y explicaciones de los procedimientos que empleen. En este sentido, aprender incluye valorar el trabajo de los demás, tomar ventaja de sus ideas y de los resultados de sus investigaciones; esto requiere que los estudiantes aprendan a escuchar a sus compañeros y respondan adecuadamente a sus puntos de vista e inquietudes.

Al problematizar el estudio de las matemáticas, los estudiantes obtienen oportunidades de reconocer el potencial de su propia práctica y de ver a la geometría como una actividad intelectual en la que pueden participar y avanzar. Existe la evidencia de que los estudiantes que participan en una búsqueda reflexiva desarrollan una disposición consistente con el quehacer matemático. Por lo que se propone utilizar la aplicación de algunos acertijos geométricos para iniciar en cada tercera reunión.

EVALUACIÓN

Al término de las actividades de cada bloque, se sugiere aplicar una retroalimentación escrita y sugerida por los mismos estudiantes, más el análisis de cuatro categorías:

A. El desempeño actitudinal del participante.
B. El desempeño de las actividades o tareas de aprendizaje.
C. El diseño del curso.
D. El desempeño del maestro estudiante durante las clases presénciales.

a.- disposición hacia la integración como miembro del grupo, apertura a compartir ideas y juicios, tolerancia a las opiniones de los demás; participación en actividades de trabajo colaborativo, entre otras.

b.- capacidad de análisis y síntesis, las habilidades desarrolladas a través de cada una de las actividades.

c.- recuperar los puntos de vista del maestro alumno en cuanto a la conducción, desempeño y dominio de los temas, si incorpora aprendizajes de conocimiento, habilidades y actitudes; si las actividades están directamente relacionadas con los propósitos implícitos y explícitos; si se orientan hacia el trabajo colaborativo en el que el estudiante sea promotor de su propio proceso de aprendizaje, y todo lo que ayude a la reorientación y planificación de actividades que tengan mayor consistencia.

d.- reflexiones que tiendan a evaluar la asistencia y participación del maestro alumno, tareas en tiempo y forma, aportaciones, argumentos e ideas en forma lógica y propositiva.

Por lo anterior este proceso de evaluación, debe permitir, tanto al docente como al maestro estudiante, las reorientaciones pertinentes a la dirección, planeación, desempeño y evaluación del curso.

BLOQUES TEMATICOS

BLOQUE I

FIGURAS EN EL PLANO

TEMAS:

1.- LAS FIGURAS EN EL PLANO EUCLIDIANO

2.- CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPAS

3.- ANALISIS DE FIGURAS PLANAS

4.- DIFERENTES ESTRATEGIAS PARA EL CALCULO DE AREAS

PROPOSITO

Conocer y entender los conceptos básicos de la geometría euclidiana, así como parte del su proceso histórico.

También es importante que el maestro-alumno maneje los instrumentos de dibujo de tal forma que no se le dificulte hacer los trazos básicos y que conozca sus procedimientos para realizarlos.

Debe dominar diferentes métodos para determinar el área de las figuras geométricas.

BIBLIOGRAFIA BASICA

Landaverde, Jesús (1970),"Líneas y ángulos, Triángulos, Cuadriláteros, Circunferencia y circulo, Ángulos relacionados con la circunferencia". Curso de Geometría (1970) Editorial Progreso.

López, Francisco (2003), " Cabri-geometre II". Taller Cabri (2004) Universidad Autónoma de Cd. Juárez (UACJ)

Alarcón, Jesús (1994), "Libro del Maestro", Matemáticas. Educ.Sec. México, SEP.

1.-LAS FIGURAS EN EL PLANO EUCLIDIANO.

ACTIVIDAD DE INTRODUCCION AL CURSO

Pedir a los maestros que recuerden algunos conceptos básicos de geometría como punto, recta, segmento, triangulo, equilátero, otros y comentarlos en el grupo.

ACTIVIDADES SUGERIDAS

1.1 Tomar del libro de Landaverde el capitulo I y distribuir por equipos (máximo 3 personas por equipo) los conceptos, para que sean expuestos de una manera significativa para que el adolescente de secundaria los comprenda.

1.2 Del libro para el maestro esquematizar con mapa mental o mapa conceptual la clasificación de la geometría.

1.3 Investigar y presentar la historia de la geometria (utilice mapas y líneas del tiempo).

1.4 Tomando en cuenta la lectura de Reconocimiento y análisis de Figuras Geométricas Bidimensionales."Teoria de Van Hiele" comentar como se dan estos niveles.

1.5 Leer en forma individual y presentar un mapa conceptual de la lectura."La Geometría desde un punto de vista cognitivo" de Raymond Duval.

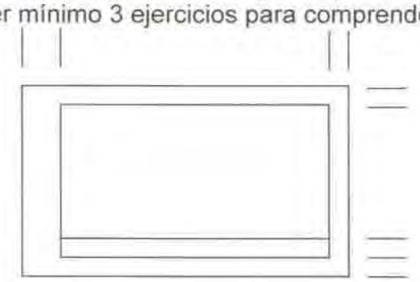
1.6 Solicitar a los maestros que traigan juego geométrico y compás de precisión, para trabajar con el siguiente tema.

2.-CONSTRUCCION CON REGLA Y COMPAS

ACTIVIDADES SUGERIDAS

2.1 Revisar que las instrucciones del material de dibujo técnico del anexo 1 estén claras ya que servirán de base para formar el álbum de trazos con regla y compás que se entregara engargolado al finalizar los diferentes trazos.

2.2 Se sugiere utilizar hoja de maquina con los siguientes márgenes y cuadro de referencia., y en cada trazo hacer mínimo 3 ejercicios para comprender y ejercitar los pasos a seguir



NOMBRE DE LA ESCUELA		LAMINA	FECHA
NOMBRE DEL MAESTRO	NOMBRE DEL TRAZO	NOMBRE DEL ALUMNO	

Lista propuesta de trazos.

1. Dividir una recta en partes iguales
2. trazar una recta paralela.
3. trazar una perpendicular en cualquier punto.
4. trazar una perpendicular en el extremo.
5. trazar una perpendicular en el punto medio.(mediatriz)
6. trazar un ángulo igual en cualquier posición.
7. encontrar la bisectriz.
8. dividir un ángulo en partes iguales.
9. la bisectriz de un ángulo impreciso.
10. construcción de triángulos escaleno.
11. construcción de triángulos equilátero.
12. construcción de triángulos isósceles.
13. construcción de triángulos rectángulo conociendo la hipotenusa.
14. trazar un cuadrado.
15. trazar un rectángulo.
16. trazar un rombo.
17. trazar un trapecio.
18. trazar un pentágono.
19. trazar un hexágono.
20. trazar un heptangulo
21. cualquier polígono, método general conociendo su lado.
22. cualquier polígono, método general conociendo la circunferencia.
23. encontrar el centro de una circunferencia.
24. trazar una circunferencia tangente a una recta.
25. trazar una circunferencia que pase por tres puntos.
26. trazar una circunferencia circunscrita a un triangulo.
27. trazar una circunferencia inscrita a un triangulo.
28. encontrar los centros de un triangulo.(incentro, circuncentro, baricentro,ortocentro)

2.3 Se presenta una necesidad de actualización y enriquecimiento del trazo geométrico, por lo que se propone iniciar con el conocimiento y ejercicios lógicos del programa Cabri presentados en el anexo 2 ., revisarlo y trabajar con las actividades propuestas.

3.- ANALISIS DE FIGURAS PLANAS

A. POLIGONOS Y TRIANGULOS
B. CUADRILATEROS
C. CIRCUNFERENCIAS Y CÍRCULO.

3.A.1. Investigar en forma individual el significado de Postulado, axioma, corolario y demostración como preámbulo del análisis, de figuras geométricas. Y compartir la información en el grupo.

3.A.2 Revisar el capitulo II, polígonos y triángulos de Landaverde y presentar en forma individual un dibujo o esquema de los componentes de un polígono y su clasificación.

3.A.3 Hacer un cuadro comparativo de la clasificación y clases de triángulos.

3.A.4 Demostrar las propiedades de los triángulos ALA, LAL, LLL y teoremas de una manera práctica y física, de tal forma que sean manipulables y fácil de entender por parte de los adolescentes.

3.A.5 Formar equipos de (máximo 3 personas) para resolver los primeros 20 ejercicios del tema (capitulo II), y entregar por equipo.(Únicamente los pares o nones) .

LECTURA COMPLEMENTARIA:
LA IMPORTANCIA DEL TRIÁNGULO

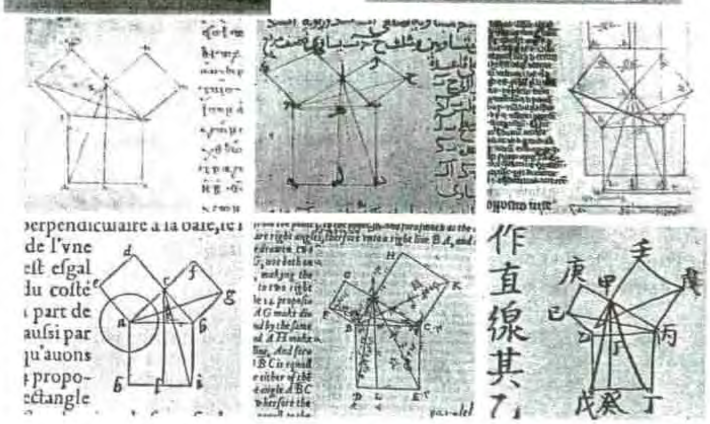
El triángulo es una de las figuras básicas de la geometría y sumamente importante por sus aplicaciones, he aquí algunas de ellas:

- Triangulación de figuras irregulares para el cálculo del área.
- En las construcciones, triangulación de polígonos para rigidizarlos (evitar que se deformen), por ejemplo en la famosa Torre Eiffel en París.
- Triangulación de polígonos para deducir la suma de sus ángulos interiores.

¿Conoces otras aplicaciones? Coméntalas con tus compañeros.

Tales de Mileto fue uno de los siete sabios de la antigüedad. Se le atribuyen las primeras demostraciones mediante el razonamiento lógico de teoremas geométricos, uno de ellos se refiere a que: *Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.*

Pitágoras demostró que: *En cualquier triángulo rectángulo (con un ángulo recto), la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.*



ACTIVIDADES SUGERIDAS

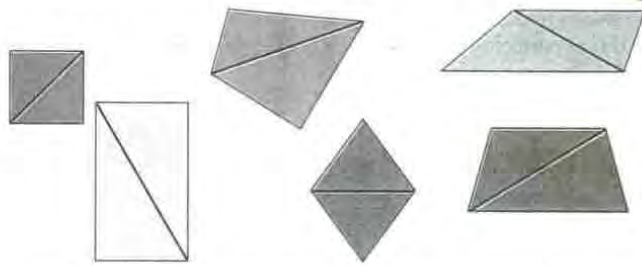
3.B.1 Del capitulo VI, cuadriláteros de Landaverde u otro autor analizar y presentar un cuadro comparativo de la clasificación de los cuadriláteros.

3.B.2 Formar equipos y distribuir los teoremas de los cuadriláteros y polígonos para que sean presentados de forma demostrativa y manipulable, de fácil entendimiento para los adolescentes.

3.B.3 Formar equipos de máximo de 3 personas, resolver y entregar por equipo los primeros 20 ejercicios del tema cuadriláteros, la mitad de equipos los pares y la otra mitad los nones.

LECTURA COMPLEMENTARIA:

LOS CUADRILÁTEROS



Podemos empezar mencionando que cualquier cuadrilátero convexo (si trazas sus diagonales, nunca cortarán a los lados) se puede dividir en dos triángulos, lo cual nos da la pauta para afirmar que la suma de sus ángulos interiores será siempre de 360°.

Los cuadriláteros se clasifican en cuadrados, rectángulos, rombos, romboides, trapecios y trapezoides.

Seguramente conoces ya las características de cada una de las clasificaciones, ¿verdad?

Sabías que por sus características el cuadrado es también rectángulo y rombo.

Terminaremos indicando que además de otras cosas la importancia de los cuadriláteros en la medición se manifiesta en que: las áreas se miden en unidades cuadradas.

¿Y tú que más conoces acerca de cuadriláteros?

ACTIVIDADES SUGERIDAS

3.C.1 Hacer un esquema donde se presenten las líneas importantes en la circunferencia y el circulo. Analizar las propiedades que estas tienen, apoyándose en el capitulo VIII, circunferencia y circulo, y capitulo IX, ángulos relacionados con la circunferencia de Landaverde u otro autor.

3.C.2 Distribuir entre los maestros-alumnos los teoremas para que sean presentados con material demostrativo y manipulable.

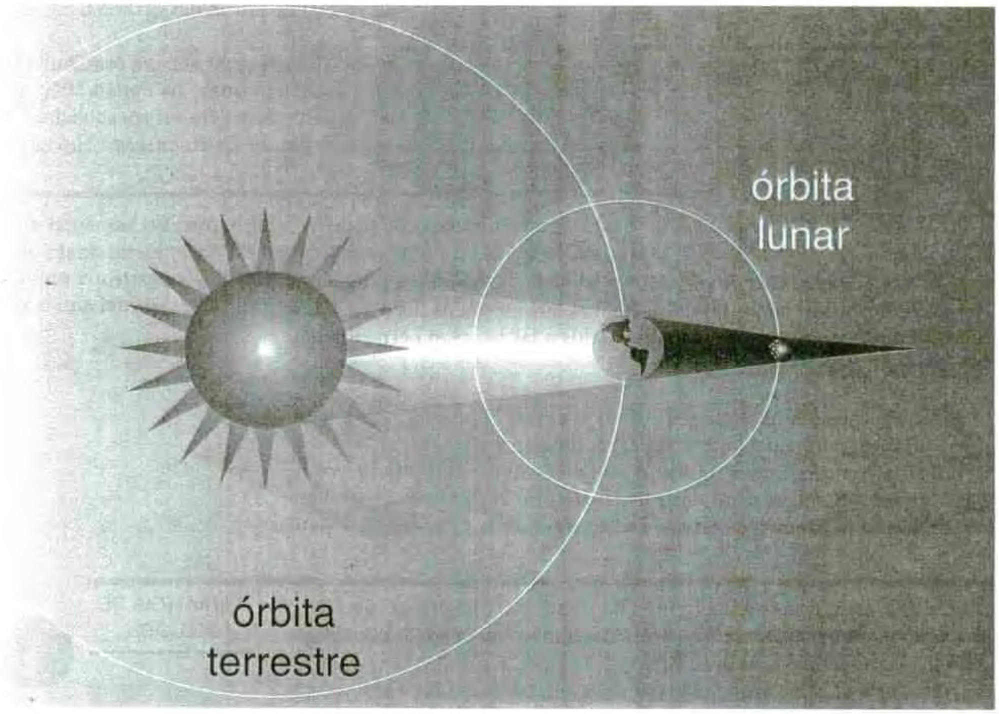
3.C.3 Formar equipos de máximo 3 personas para resolver y presentar los 20 ejercicios del tema IX en forma alternada pares y nones.

En el siguiente diagrama se muestra cómo ocurren los eclipses de Luna.

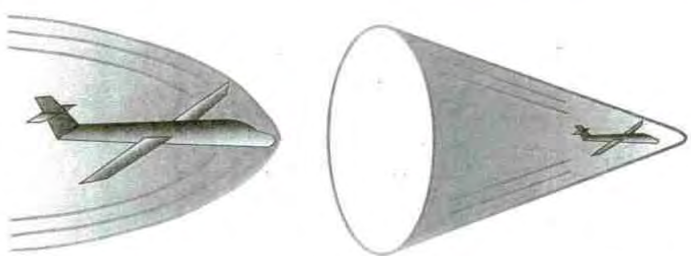
La luz del Sol, que es la que ilumina a la Luna, es interceptada por la Tierra. En ese momento, están alineadas la fuente luminosa (el Sol), el astro receptor (la Luna) y el que intercepta o corta los rayos de luz.

Otra manera de explicar cómo sucede el eclipse de Luna consiste en señalar que la Luna entra en la sombra de la Tierra. Esta sombra tiene la forma de un cono.

También la Luna tiene una sombra de forma cónica. Cuando la Tierra entra en esa zona es cuando se producen los eclipses de Sol.



Algo semejante sucede cuando un avión se desplaza en el aire. Las partículas de aire que son golpeadas por la nariz del avión se mueven, y dicho movimiento se va transmitiendo de unas partículas cercanas a otras más alejadas. En este caso, la forma en que se propaga el movimiento del aire es como se representa a continuación:



De hecho, lo que un avión genera es una perturbación en el aire, con la forma de un gran cono. Más aún, cuando la perturbación alcanza el nivel del suelo, lo que se produce en esa forma cónica es un corte, efectuado precisamente por el plano horizontal que es la superficie de la Tierra. En otras palabras, lo que se obtiene es una sección de un cono. Cuando eso sucede, lo que más fácilmente percibimos es un ruido de muy alto volumen que resulta muy molesto para nuestros oídos.

4.- DIFERENTES ESTRATEGIAS PARA EL CALCULO DE AREAS.

A. RETÍCULAS
B. TRIANGULACIÓN
C. MEDICIÓN DE SUPERFICIES Y/O PERÍMETROS
D. GENERALIZACIONES

ACTIVIDADES SUGERIDAS

4.A.1 Definir el concepto de área y superficie, generar y presentar un cuadro de figuras geométricas básicas y sus formulas.

4.A.2 Demostrar las formulas para calcular el área de las figuras geométricas básicas en forma matemática y física (manipulable).

4.A.3 Formar equipos y distribuir las diferentes formas de calcular el área de un triangulo y figuras especiales para que sea presentada como exposición.

a) área en función de sus lados.
b) área en función de sus lados y de su circunferencia circunscrita.
c) área en función de sus lados y de su circunferencia inscrita.
d) de un polígono cualquiera.
e) de un circulo.
f) sector circular.
g) segmento circular.
h) corona circular.

4.A.4 En equipos de 5 personas resolver y presentar los 15 primeros problemas del tema áreas de las superficies planas. Capitulo XVI.

4.A.5 Utilice una hoja milimétrica y trace un polígono irregular para posteriormente calcular el área de la figura utilizando la cuadricula como unidad medida.

4.B.1 Investigue cual es la formula para calcular el número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de 4,5,6 lados a partir de un vértice, hacer algunos ejercicios de comprensión.

4.B.2 En forma individual investigar la ley de los senos y la ley de los cosenos y presentar mínimo tres ejemplos de la aplicación de cada ley.

4.B.3 Trace un polígono y partiendo de un vértice trace todas sus diagonales formando así una serie de (n-2) triángulos, obtenga los datos necesarios para calcular el área de cada triangulo y al final sumar estas parciales para obtener el área total de la figura.

Para el calculo del área parcial utilizar regla y transportador para determinar datos y hacer el calculo por diferente método.

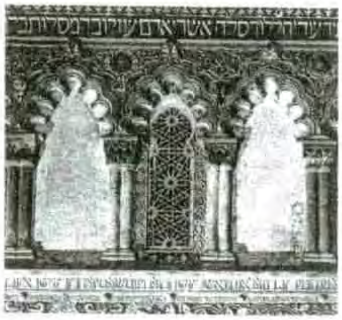
a) Formula general de triangulo b*h/2
b) En función de sus lados.
c) Por la ley de los cosenos
d) Por la ley de los senos.

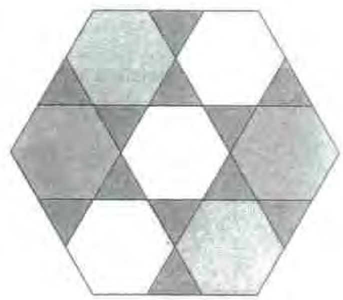
4.B.4 Utilizando cualquiera de los cuatro métodos anteriores calcular y comprobar el área de la figura del punto 4.A.5.

LECTURA COMPLEMENTARIA:
LOS MOSAICOS

Hace muchos años se empezó a utilizar la geometría para decorar diversos objetos, entre ellos vasijas, tejidos, puertas, muros, etc., todos con diseños geométricos repetitivos.

Es curioso que a través de miles de años de historia e infinidad de arte, solamente se hayan utilizado alrededor de media docena de diseños básicos, como cuadriculados, escamas, zigzag, ruedas. Un cristalógrafo ruso llamado Federov, en 1891, demostró que no hay más de 17 estructuras básicas para las infinitas decoraciones posibles del plano formando mosaicos periódicos, esto es, con mosaicos que se repiten en un orden, forma y tamaño establecidos.





4.C.1 Calcular área y perímetro de las siguientes figuras u otras que se presenten por parte de los estudiantes.

1. Sea abc un triangulo equilátero y P, Q y R, los puntos medios de AB, BC y CA respectivamente. Los arcos PR, PQ y QR tienen como centro los vértices del triangulo. Si un lado del triangulo mide 6. ¿Cuál es el perímetro de la región PQR y el área de la misma región?

2. Sea el triangulo equilátero CDE, el cuadrado ABCD que comparte con el triangulo el lado CD y el cuadrado DEFG que comparte el lado DE. Encuentre el valor del ángulo ADG.

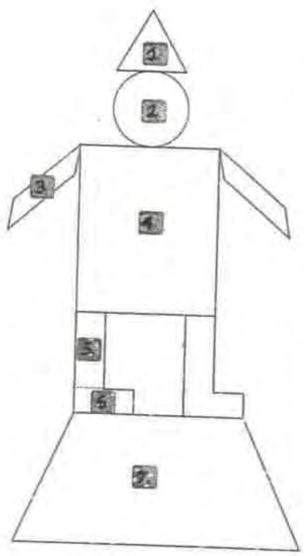
3. Resolver la ficha del muñeco de aserrín pintado.

Ficha 92

TEMAS DE GEOMETRÍA: Equivalencia de figuras y cálculo de áreas
Contenido(s): Cálculo de áreas
Propósito: Habilidades de comunicación

EL MUÑECO DE ASERRÍN PINTADO

En una macroplaza se va a rellenar con aserrín pintado la figura de la izquierda. Calcula su área total y su costo, sabiendo que el m^2 de aserrín pintado cuesta $56.00.



Completa la siguiente tabla:

Figura geométrica	Dimensiones	Fórmula del área de la figura	Áreas
1. Triángulo	$b = 3$ m $h = 2$ m b = base h = altura	$A = \frac{bh}{2}$	
2. Círculo	$r = 1.5$ m $\pi = 3.14$ r = radio		
3. Romboide	largo = 5 m ancho = 2 m		
4. Rectángulo	largo = 10 m ancho = 7 m		
5. Rectángulo	largo = 6 m ancho = 2 m		
6. Rectángulo	largo = 3 m ancho = 1.5 m		
7. Trapecio	$b = 8$ m $B = 12$ m $h = 10$ m h = altura B = base mayor b = base menor		

Área total = ____________ Costo = $ ____________

4.C.2. En forma individual hacer y presentar un examen de 20 reactivos mínimo que permita la retroalimentación del Bloque I

BLOQUE II

SIMETRIAS

TEMAS:

1. SIMETRÍA AXIAL.
2. SIMETRÍA RADIAL.
3. ISOMETRÍA.

PROPOSITO:

Conocer y manejar las características y propiedades de la simetría, y que nos permita usar, diseñar y crear material didáctico que facilite el aprendizaje del alumno de secundaria. Así como identificar diferentes aplicaciones de la simetría en la vida real.

BIBLIOGRAFIA BASICA

Landaverde, Jesús (1970),"Simetrías y movimiento de figuras". Curso de Geometría (1970) Editorial Progreso.

López, Francisco (2003), " Cabri-geometre II". Taller Cabri (2004) Universidad Autónoma de Cd. Juárez (UACJ)

Alarcón, Jesús (1994), "Libro del Maestro", Matemáticas. Educ.Sec. México, SEP.

García, Marco y Delgado, Alejandra (2000),"Simetría axial y central". Invitación a las Matemáticas (2000) Editorial Prentice Hall.

Caballero, Arquímedes (2001), "Geometría plana", Cuaderno de Matemáticas II (2001) Editorial Esfinge.

González, Ma. Paulina (2000),"Simetría axial y central" . Cuaderno de Matemáticas II (2000) Editorial Castillo.

1. SIMETRIA AXIAL

ACTIVIDADES SUGERIDAS

1.1 Utilizando un pliego de papel china, una hoja de papel de maquina o de su cuaderno doblar y recortar figuras sencillas como triángulos, cuadrados, rombos, etc. Doblando el papel a la mitad, en cuatro, ocho, etc. partes, analizar y determinar la relación que existe entre estos cortes y los dobleces.

1.2 En equipos de 3 personas máximo definir que es simetría axial y mencionar sus características.

1.3 Recortar algunas figuras geométricas y colocar la base de un espejo sobre la figura para que una porción de esta y unidad a su reflejo, nos produzca la apariencia de la figura completa.

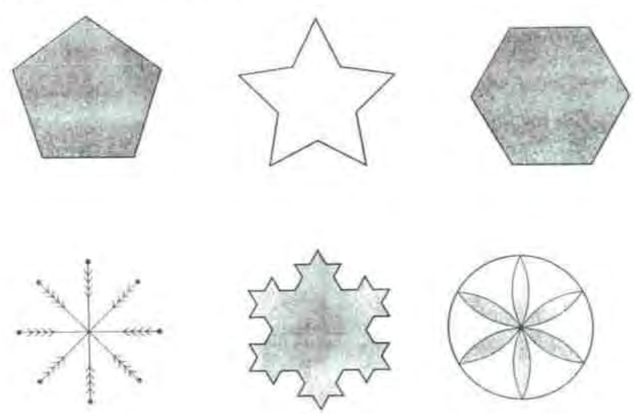
1.4 Realiza el siguiente ejercicio

EJERCICIOS

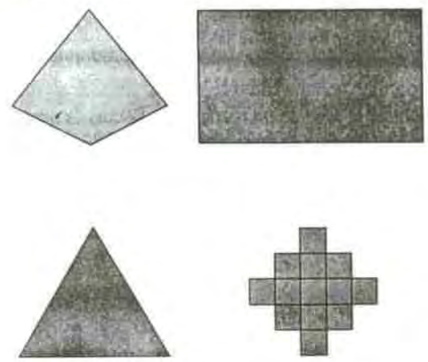
1. Copia el hexágono de la siguiente figura y verifica si tiene simetría axial o central. ¿Cuántos ejes de simetría tiene el hexágono regular?

Hexágono regular

2. ¿Son simétricas las siguientes figuras?

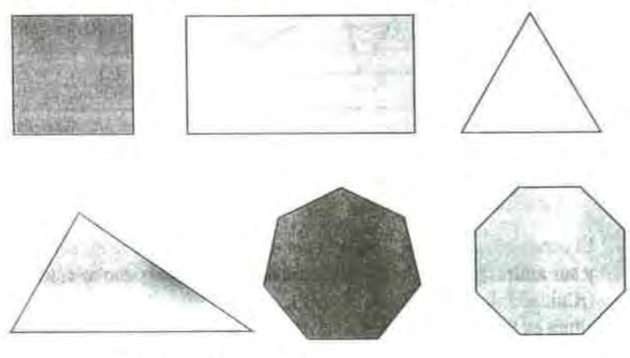


3. ¿Cuántos ejes de simetría tienen las siguientes figuras?

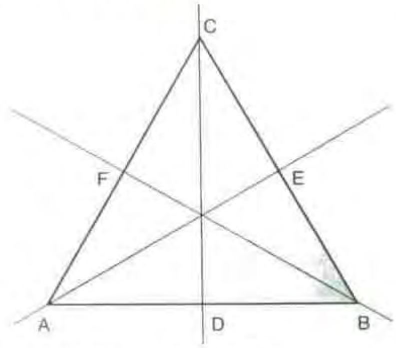


4. Dibuja una figura que tenga 3 tres ejes de simetría.

5. ¿Cuáles de las siguientes figuras tienen simetría central?



6. Considera el siguiente triángulo equilátero



¿Cómo queda el triangulo equilátero si lo reflejas respecto al eje CD y luego respecto al eje AE?

¿C`ómo queda el triangulo original si lo rotas 120°?

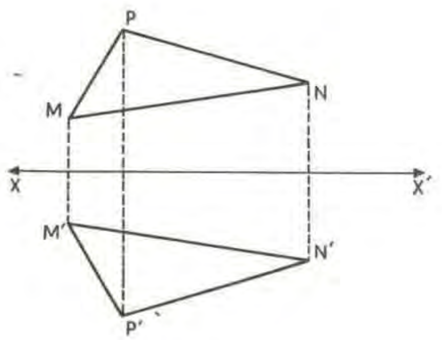
7. a) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un polígono regular de 5 lados, 6 lados, 7 lados, etc.?

b) ¿Cuáles de ellos tienen simetría central?

1.5 Ejecutar y contestar las preguntas [Pág. 195....201 Arquímedes caballero.

Ejemplo resuelto

Trazar la figura simétrica del triángulo M N P respecto al eje X X'.



a) ¿Qué nombre recibe el eje X X'?

eje de simetría

b) ¿Cómo son $\overline{MM'}$, $\overline{PP'}$ y $\overline{NN'}$ respecto a $\overleftrightarrow{XX'}$?

perpendiculares

c) ¿Cómo son, respecto al eje X X', dos puntos simétricos?

equidistantes

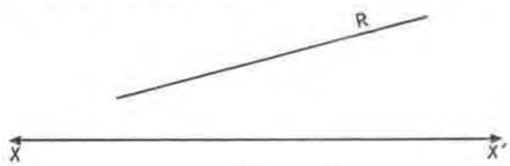
d) ¿Cuál es el segmento simétrico de $\overline{MP}$?

$\overline{\mathbf{M'P'}}$

e) ¿Cuál es el ángulo simétrico de $\hat{P}$?

$\hat{P}'$

1. Trazar la recta simétrica de R respecto al eje X X'.

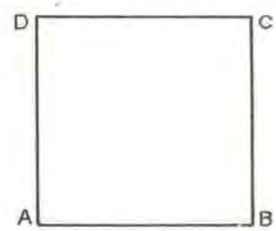


a) ¿Se cortan R y su simétrica R' en el mismo punto de X X'?

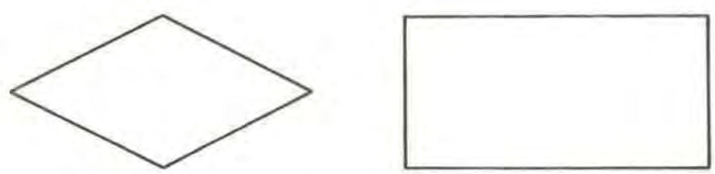
b) ¿Cómo son entre sí los ángulos que forman las rectas R y R', con el eje X X'?

c) ¿Qué es $\overleftrightarrow{XX'}$ respecto al ángulo que forman R y R'?

6. Trazar los ejes de simetría posibles del cuadrado A B C D.



7 Hacer lo mismo que en el punto anterior con el rombo y el rectángulo dibujados.



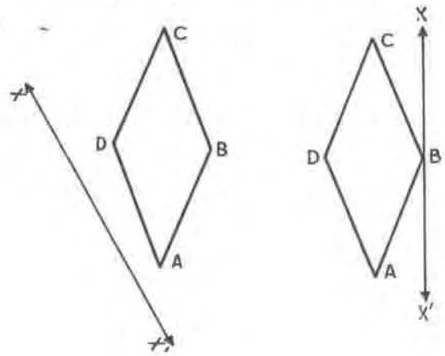
8. ¿Qué segmentos son ejes de simetría del círculo?

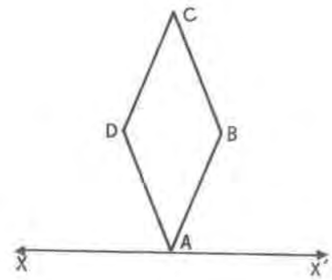
---

9. Trazar un eje de simetría de cada una de las figuras siguientes:

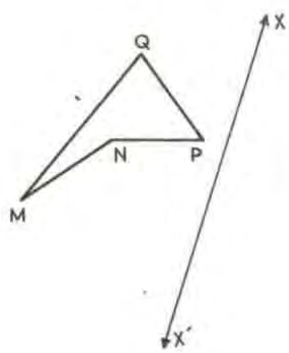
10. Dibujar dos figuras artísticas, objetos o formas de la naturaleza que presenten simetría axial.

2. Trazar, en cada caso, el rombo simétrico de A B C D respecto a $\overleftrightarrow{XX'}$.





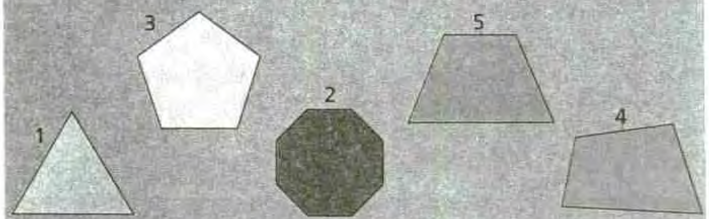
3. Trazar la figura simétrica de M N P Q R respecto a $\overleftrightarrow{XX'}$.



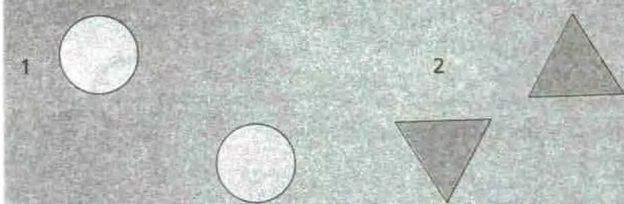
4. Dibujar un cuadrado y, tomando uno de sus lados como eje de simetría, trazar su simétrico.

5. Hacer lo mismo que en el punto anterior con un romboide, un trapecio y un trapezoide.

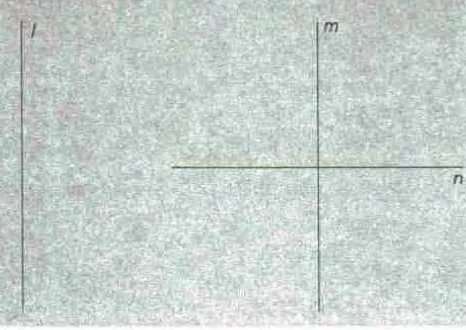
3. (pentágono regular)
4. (trapezoide)
5. (trapecio isósceles)



◆ Traza dos ejes de simetría en cada caso:



◆ Inventa y traza figuras simétricas a uno o dos ejes de simetría.



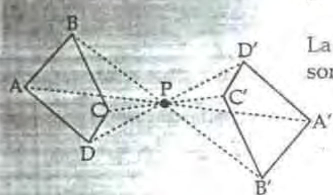
LECTURA COMPLEMENTARIA:
VOLANDO SIN VOLAR

Una ilusión óptica lograda por la simetría es la apariencia de volar o quedar suspendido del suelo sin problema, esto es posible si se cuenta con un espejo lo suficientemente grande como para reflejar la mitad de una persona, en cuyo caso basta colocar la mitad del cuerpo en la orilla del espejo y levantar un pie y una mano para que al reflejarse dé la apariencia de volar. Si puedes inténtalo.

2. SIMETRIA CENTRAL

ACTIVIDADES SUGERIDAS

2.1 Realice el siguiente ejercicio. Pág. 108 ediciones castillo



2. *Simetría central*

La simetría central se basa en un punto, aquí no hay eje, sus características son:

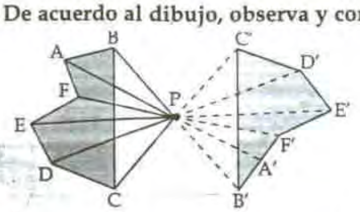
- La simetría central es una rotación de 180°.
- Cada punto equidista al centro con su imagen.
- Al rotar (girar) la figura cambia de posición.
- Los segmentos que unen un punto con su imagen no son paralelos.

En estos polígonos se trazaron los ejes de simetría y observamos que el cruce de ellos coincide con el punto para la simetría central.

En algunas figuras geométricas el centro de simetría está dentro de la figura.

En cada caso realiza lo que se indica.

1. De acuerdo al dibujo, observa y contesta.



¿Son simétricas ambas figuras?__________________

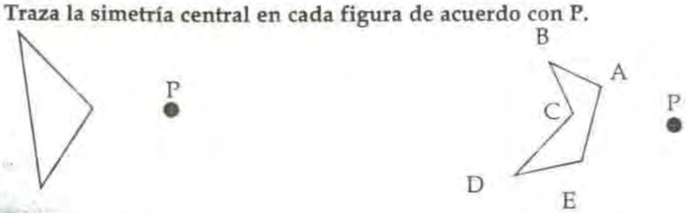
¿En qué se basa su simetría?___________________

¿Cómo son los segmentos que unen el punto con su imagen?______________________________

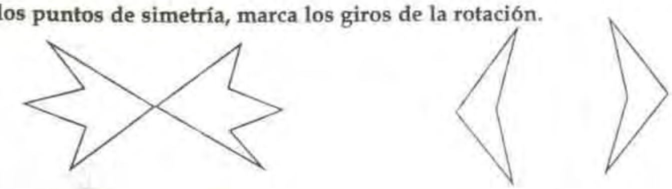
¿Cómo se llama esta simetría?__________________

Y el centro de simetría, ¿está afuera o dentro de la figura?___________________________________

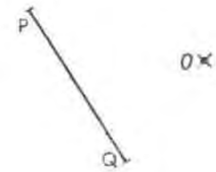
2. Traza la simetría central en cada figura de acuerdo con P.



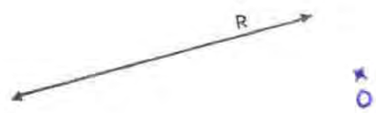
3. Localiza los puntos de simetría, marca los giros de la rotación.



1. Trazar el segmento simétrico de PQ, respecto al punto O.

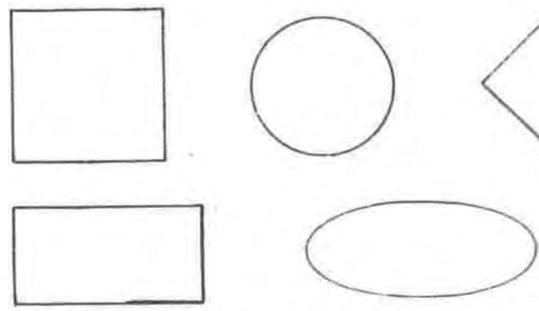


2. Trazar la recta simétrica de R respecto al punto O.



3. Trazar, en cada caso, la figura simétrica respecto al punto O.

4. Trazar el centro de simetría de las figuras siguientes:



5. Dibujar tres figuras que correspondan a objetos, plantas, animales, que presenten simetría central.

6. Trazar un triángulo isósceles cualquiera y su simétrico respecto a uno de sus vértices.

7. ¿A qué caso particular de rotación corresponde la simetría central?

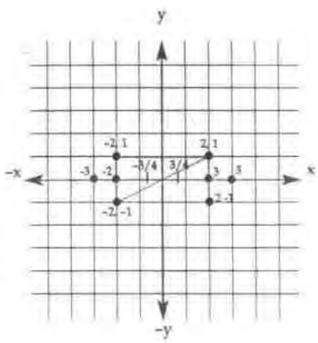
8. ¿Qué relación existe entre el centro de simetría de una figura y su centro de gravedad?

2.3 En equipo de 3 hacer un cuadro comparativo entre simetría axial y centra y presentarlo al grupo.

2.4

4. Aplicaciones de las propiedades de las simetrías

Las coordenadas rectangulares tienen una intersección de dos ejes, dividen el plano en cuatro partes llamadas cuadrantes, el eje horizontal "x" o eje de las abcisas, el eje vertical "y" o eje de las ordenadas y el punto de intersección llamado origen.



Si utilizamos los ejes de abscisas y de ordenadas como ejes de simetría, una figura en el cuadrante I , con el eje y como eje axial tiene su simétrica en el cuadrante II; al usar el eje x como eje axial la figura simétrica aparece en el cuadrante IV. Con la simetría central necesitamos un punto y tomando el origen como centro de simetría la figura simétrica aparece en el cuadrante III.

Al buscar simétrico de un punto sobre el eje se localiza en el mismo eje en sentido contrario y a igual distancia del origen, si el punto no está sobre el eje se requiere una pareja ordenada (xy). El simétrico se encuentra en tres opciones por simetría axial en el cuadrante II y en cuadrante IV y por simetría central en el cuadrante III; como en el ejemplo de la figura.

Ejemplo:	Simétrico de	
	-3 3	(2,1) axial con y ....(-2,1)
	-2 2	Con x ....(2,-1)
	-3/4 .....3/4	Central ......(-2,-1)

Realiza lo que se te pide en cada caso.

1. Escribe los simétricos de cada número.

8 ________, -5 ________, -6 ________, 7 ________, 9 ________

2. Realiza la suma de simétricos.

(8) + (-8) = ________ (-11) + (11) = ________ (9) + (-9) = ________

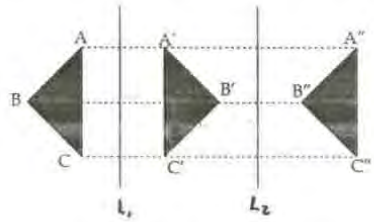
¿Por qué crees que al sumar dos simétricos, el resultado es cero?

____

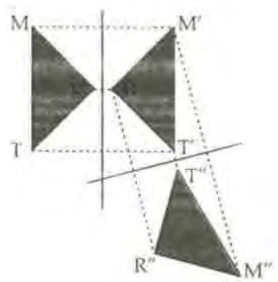
5. Combinación de simetrías

Cuando trazamos figuras simétricas con respecto a un eje, realmente lo que hacemos es moverla, cambiando de posición, con dos simetrías, ¿qué puede pasar?, quizá dependa de cómo quedan los ejes entre sí, los ejes pueden ser:

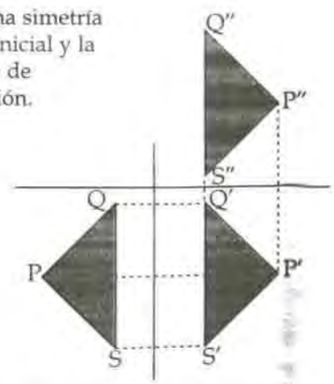
Paralelos:
Al aplicar la primera transformación queda invertida, con la segunda vuelve a la posición correcta.



Secantes:
Se cortan entre sí.



Perpendiculares: Es una simetría central entre la figura inicial y la tercera figura, el punto de simetría es la intersección.



ACTIVIDADES SUGERIDAS

3.1 Trace un triangulo con cualquier inclinación y un eje simétrico (L_1) a 2 cm. de distancia, en seguida trace su triangulo simétrico (A'B'C') y luego un segundo eje simétrico (L_2) paralelo al anterior a 3 centímetros del triangulo (A'B'C'), por ultimo trace el triangulo simétrico (A"B"C").

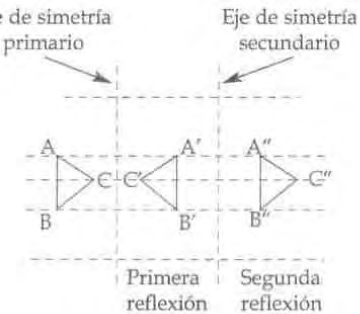
Observe y mida su trazo y llegue a una conclusión.

3.2 Haga el siguiente ejercicio y compruebe que la traslación de la figura es el doble de la distancia entre los 2 ejes de simetría.

Ficha 84

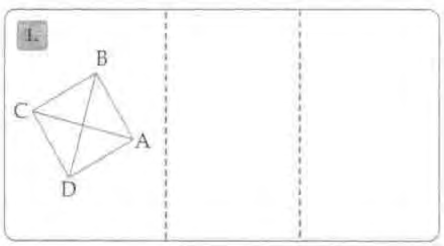
TEMAS DE GEOMETRÍA: Simetrías axial y central
Contenido(s): Composición de reflexiones
Propósito: Habilidades de comunicación

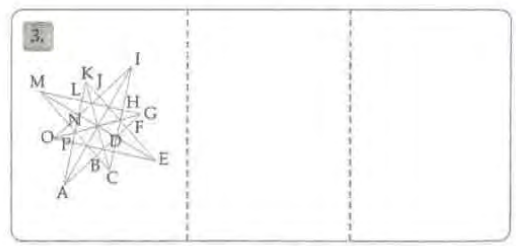
TRASLACIÓN

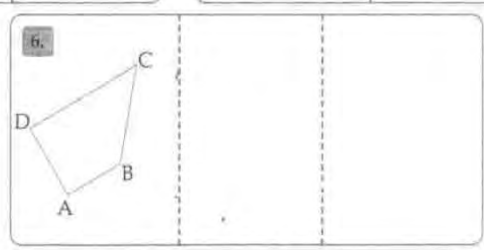


Cuando realizamos dos reflexiones de la misma figura lo que obtenemos es una traslación de ella.

Realiza dos reflexiones de las figuras respecto a los ejes de simetría, como en el ejemplo anterior.







3.3 Hacer el siguiente ejercicio

5.5 Composición de dos reflexiones con ejes que se cortan (rotación).

ALREDEDOR DE UN PUNTO

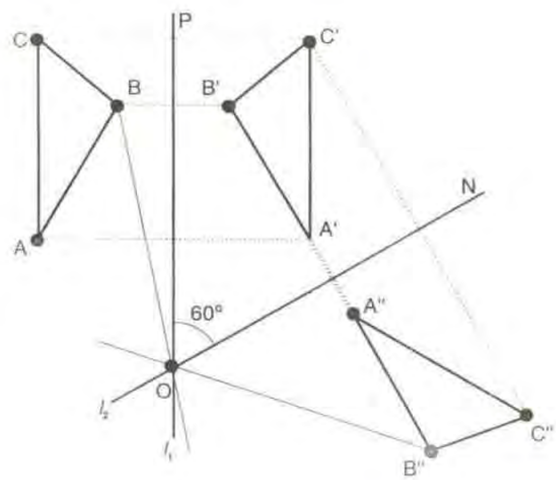
La ilustración de la derecha muestra la composición de dos simetrias cuyos ejes se cortan en el punto O.

1. ¿Cuánto mide el ángulo NOP? ______

2. ¿Cuanto mide el ángulo B"OB? ______

3. ¿Cuántas veces es mayor ∡ B"OB que ∡ NOP? ______

4. ¿Cómo son las distancias $\overline{OB}$ y $\overline{OB''}$?



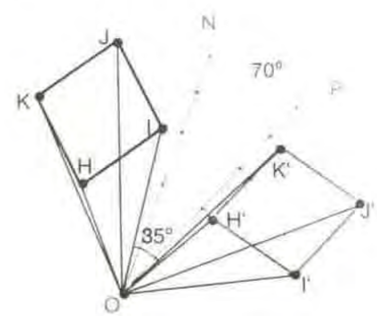
La composición de dos reflexiones con ejes que se cortan en un punto O, es una rotación con centro en O, y cuya amplitud es el doble del ángulo formado entre los dos ejes.

¿Cómo hacer una rotación, en lugar de una composición de dos reflexiones?

1. Medir el ángulo formado entre los dos ejes: ∡ NOP = 35°.

2. Haciendo centro en O, se trazan arcos del doble de ∡ NOP que inicien en cada uno de los vértices de la figura original.

3. Unir los puntos donde terminen los arcos, para formar la figura girada.



Para que los arcos $\overset{\frown}{KK'}$, $\overset{\frown}{HH'}$, $\overset{\frown}{II'}$, y $\overset{\frown}{JJ'}$ sean de 70°, se requiere que los ángulos K'OK, H'OH, I'OI y J'OJ midan 70°.

3.4

EJERCICIOS

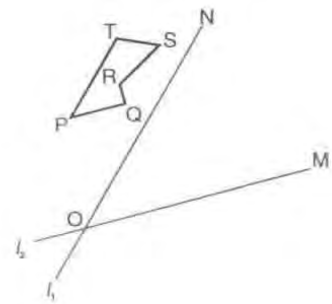
5. Aplica al polígono PQRST una rotación, en lugar de una composición de las reflexiones, cuyos ejes sean l_1 y l_2.

6. ¿Cuánto mide el ángulo MON? ______

7. ¿Cuánto deben medir los ángulos siguientes?

∡ P'OP = __________

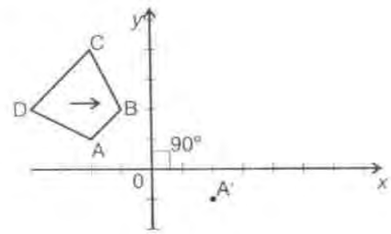
∡ Q'OQ = __________



8. Considera como ejes de simetría los ejes *x* y *y*, para aplicar una rotación de 180° a la figura ABCD.

9. ¿Cuáles son las coordenadas de A', B', C' y D'?

A' (,) B' (,)
C' (,) D' (,).

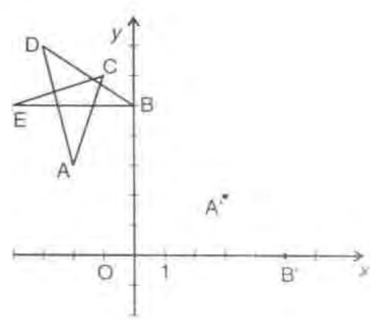


Una composición de reflexiones cuyos ejes son perpendiculares, produce una rotación de 180°, es decir, una **simetría central**.

DESAFÍO

12. Completa la rotación y determina su amplitud.

∡ AOA'= __________



10.  **OPRIME** las teclas [4] [5] [+] [+] ; luego, oprime [5] [=].

¿Qué observas? ______________

11. ¿Qué número aparecerá si ahora oprimes [1] [4] [=] ? [ ]

PROYECTO PARA HACER EN CASA

13. Realiza una composición de dos reflexiones, que dé como producto final la rotación presentada en el desafío. Considera que un eje de simetría pasa por los puntos (0, 0) y (1, 2).

3.5 Formar equipos de 5 personas, observando el medio ambiente, analizar y escribir un mínimo de veinte aplicaciones de la simetría para presentar al grupo.

3.6 Diseñar y presentar un examen de 20 reactivos mínimo que permita la retroalimentación del bloque II.

LECTURA COMPLEMENTARIA:
LOS FRISOS Y LA GEOMETRÍA

Los frisos o cenefas son composiciones en las cuales la audacia, la imaginación y el diseño geométrico se ponen en juego para crear belleza al repetir figuras. Los frisos evolucionan desde la hilera hasta las finas decoraciones de los egipcios, las bandas magníficas de los griegos, la decoración en textiles de los romanos, los márgenes en libros del medievo, las grecas de algunos vestidos y blusas mexicanos, etc. En el friso es posible apreciar el orden y la periodicidad, el método de generarlos responde a una perfecta sincronía de movimientos geométricos en número limitado.

BLOQUE III

LOS SÓLIDOS

TEMAS

1.- LOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS, CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES.

2.- CONSTRUCCIÓN Y ANÁLISIS DE UN SÓLIDO.

A. PRISMAS

B. CRISTALOGRAFÍA

C. ESTRUCTURAS QUE SE APOYEN EN SÓLIDO

3.- LOS SÓLIDOS REGULARES.

PROPOSITO

Conocer y aplicar las características y propiedades de los sólidos, en el análisis, planeación y solución de problemas, al mismo tiempo lograr desarrollar habilidad en el dibujo, corte y construcción de sólidos regulares y semiregulares.

Lograr abstraer y conocer en forma general las estructuras cristalinas en los materiales sólidos.

BIBLIOGRAFIA BASICA

Landaverde, Jesús (1970),"Simetrías y movimiento de figuras".Curso de Geometría (1970) Editorial Progreso.

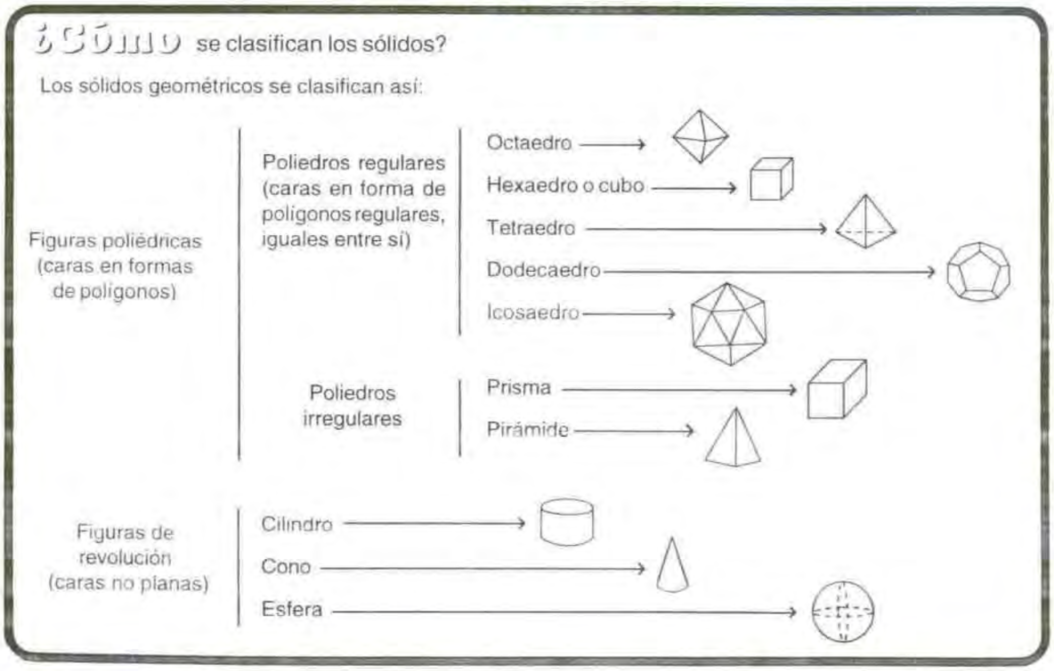
López, Francisco (2003), " Cabri-geometre II". Taller Cabri (2004) Universidad Autónoma de Cd. Juárez (UACJ)

Alarcón, Jesús (1994), "Libro del Maestro", Matemáticas. Educ.Sec. México, SEP.

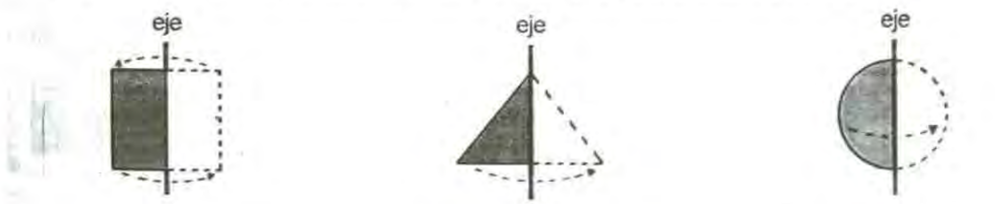
García, Marco y Delgado, Alejandra (2000),"Solidos". Invitación a las Matemáticas (2000) Editorial Prentice Hall.

Caballero, Arquímedes (2001), "Solidos, calculo de volúmenes, desarrollos.",Matemáticas II (2001) Editorial Esfinge.

González, Ma. Paulina (2000),"Solidos" . Cuaderno de Matemáticas II (2000) Editorial Castillo.



La figuras de revolución se obtienen al hacer girar una figura plana alrededor de un eje.



ACTIVIDADES SUGERIDAS

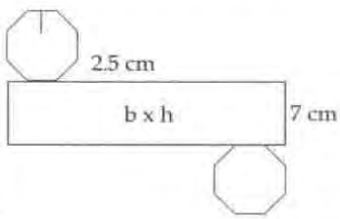
1.1 Formar equipos de 3 personas máximo, y tomando en cuenta el esquema anterior hacer un cuadro comparativo de los solidos geométricos, enumerando sus caracteristicas y propiedades para posteriormente compartirlo al grupo.

1.2 Leer y analizar el capitulo XXIII, polígonos en general prismas de Geometría de Landaverde y en equipo de 3 personas resolver y presentar los primeros 15 ejercicios que vienen al final del tema. Antes resolver los siguientes ejercicios.

2. *Aplicación de fórmulas para alcular el volumen de prismas y cilindros*

Los **prismas** toman el nombre específico, según sea la forma de sus bases, triangular, pentagonal, etcétera. Con la fórmula del área de un polígono se encuentra el área de las bases, y para encontrar el área lateral se multiplica el perímetro de la base por la altura del prisma. El área total es la suma del área lateral más el área de las bases.

Ejemplo: Área total de un prisma hexagonal.
Lado de la base 2.5 cm , apotema 1.8 cm y 7 cm de altura.



Base = $\frac{p \times a}{2}$

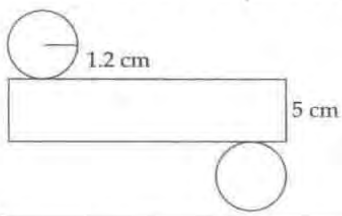
Área de las bases = $\frac{15 \times 1.8}{2} \times 2$ $\quad$ 27 cm^2

Área lateral = $15 \times 7 =$ + = $\underline{105 \text{ cm}^2}$

Área total = 132 cm^2

Para encontrar el área total de un cilindro se procede de la misma manera: se encuentra el área de la base ($\pi \times r^2$) se multiplica por dos que es el número de bases y se suma al área lateral (b x h).

Ejemplo: Área total de un cilindro que tiene las siguientes medidas:



Base = $\pi \times r^2$

Área lateral = $p \times d \times h$

Área de las bases = $3.14 \times 1.44 \times 2$

= 9.0432 cm^2

Área lateral = $3.14 \times 2.4 \times 5 =$ $\underline{37.68 \quad \text{cm}^2}$

Área total = 46.7232 cm^2

El volumen de un prisma o de un cilindro se obtiene multiplicando el área de la base por la altura, es decir, **V = AB x h.** Las unidades cúbicas se utilizan para medir el volumen.

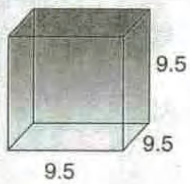
Ejemplo: El prisma hexagonal del ejemplo anterior tiene 27 cm en el área de la base, por lo tanto una base mide 13.5 cm multiplicados por la altura de 7 cm se obtiene el volumen = 94.5 cm^3

El cilindro del ejemplo anterior tiene 9.043 cm en el área de la base, por lo tanto una base mide 4.5216. Esta base se multiplica por la altura (5cm) lo que da 22.608 cm^3 de volumen.

Realiza lo que se indica en cada caso

1. Encuentra el área total y el volumen de los siguientes sólidos:

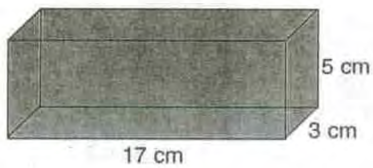
De un cubo que mide de arista 9.5



área total = ______

volumen = ______

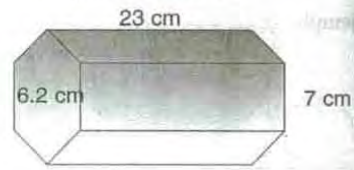
De un paralelepípedo cuyás medidas son:



área total = ______

volumen = ______

De un prisma hexagonal que mide de lado de la base 7 cm, apotema 6.2 cm y de altura 23 cm.



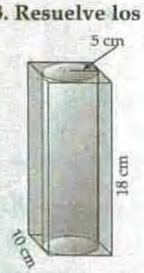
área total = ______

volumen = ______

2. Completa la tabla con las fórmulas y el dibujo del sólido correspondiente.

Nombre	Fórmula área de base	Fórmula volumen	Sólido
Cubo			
Prisma pentagonal			
Paralelepípedo			
Cilindro			
Prisma triangular			

3. Resuelve los siguientes problemas.



a) Cuál será la diferencia de volumen entre un prisma cuadrangular de 10 cm de lado de la base y de 18 cm de altura y un cilindro de 5 cm de diámetro y de igual altura?

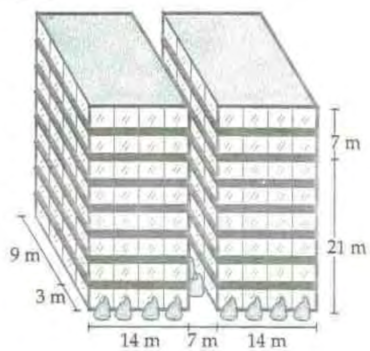
b) Cuál es el área lateral de una salón que mide 8 m de ancho, 10 m de largo y 3..5 m de altura. Encuentra también el volumen.

Ficha 98

TEMAS DE GEOMETRÍA: Sólidos
Contenido(s): Volúmenes de sólidos comunes
Propósito: Habilidades de comunicación y operatorias

VOLÚMENES DE SÓLIDOS COMUNES

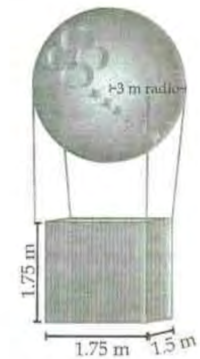
Calcula el volumen de cada edificio u objeto.



Volumen = ________________ m^3

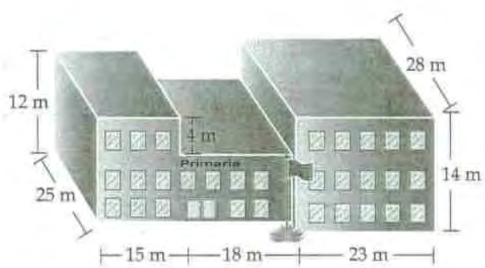
Volumen = ________________ m^3

Volumen = ____________ m^3

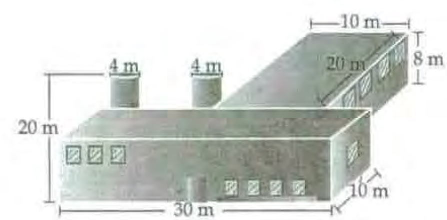


Considera $\pi = 3.14$

Volumen del globo = ______ m^3
Volumen de la canastilla = ______ m^3



Volumen total del edificio = ________________ m^3



Considera $\pi = 3.14$

Volumen total del edificio = ____________ m^3

1.3 Analizar las siguientes formulas y realizar los ejercicios que vienen incluidos.

¿Cómo calcular el área lateral y el área total de un cilindro?

En este desarrollo plano del cilindro aparece un rectángulo cuya base es igual a la longitud de la circunferencia de la base.

El área lateral del cilindro será:

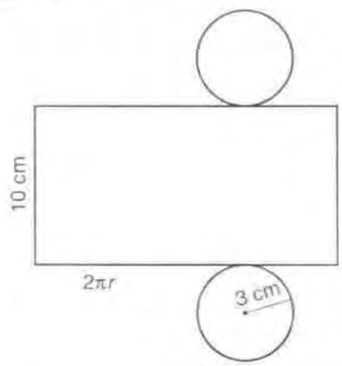
A_L = Área del rectángulo $= 2\pi \cdot r \cdot g$

$A_L = (2)(3.14)(3\text{ cm})(10\text{ cm}) = 188.4\text{ cm}^2$

Los dos círculos que forman las bases son iguales. El área de las bases será:

A_B = Área del círculo $= \pi \cdot r^2$

$2A_B = (2)(3.14)(3\text{ cm})^2 = 56.52\text{ cm}^2$



El área total será, por lo tanto:

$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 188.4 + 56.52 = 244.92\text{ cm}^2$

En general, el área de un cilindro es:

$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 188.4\text{ cm}^2 + 56.52\text{ cm}^2 = 244.92\text{ cm}^2$

$\boxed{A_T = 2 \cdot \pi \cdot r\,(g + r)}$

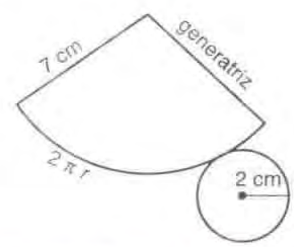
Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno.

1. Calcula el área total de un cilindro de 2.5 cm de radio y 6 cm de generatriz.

2. Se ha pintado una tubería cilíndrica y se han pagado $ 50 por cada metro cuadrado. Si la tubería tiene un diámetro de 8.6 cm y 8 m de largo, ¿cuál es el importe de la pintura utilizada? ______________

¿Cómo calcular el área de un cono?

En este desarrollo plano aparece un sector circular, que forma la superficie lateral de un cono. La longitud de su arco es igual a la longitud de la circunferencia de la base y su radio es la generatriz del cono.



El área lateral del cono será:

A_L = Área del sector circular

$A_L = \dfrac{l \cdot g}{2} = \dfrac{2\pi\, r \cdot g}{2} = \pi \cdot r \cdot g$

El área de la base es el área del círculo:

$A_B = \pi \cdot r^2 = (3.14)\,(4\text{ cm}^2) = 12.56\text{ cm}^2$

El área total será:

$A_T = A_L + A_B = 43.96\text{ cm}^2 + 12.56\text{ cm}^2 = 56.52\text{ cm}^2$

En general, el área de un cono es:

$\boxed{A_T = A_L + A_B = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r\,(g + r)}$

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno.

3. Calcula el área de un cono de 4 cm de radio y 9 cm de generatriz.

4. ¿Qué superficie de cartulina necesitas para construir un cono cuyo radio mide 5 cm y cuya generatriz es cuatro veces mayor?

¿Cómo calcular el área de una esfera?

Dado que la esfera no tiene desarrollo plano, el cálculo de su área resulta complicado. Sin embargo, los matemáticos han podido establecer una fórmula para calcular esta área:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Calcula el área de la esfera de la derecha.

$$A = 4(3.14)\ (5\ \text{cm})^2 = 4(3.14)\ (25\ \text{cm}^2) = 314\ \text{cm}^2$$

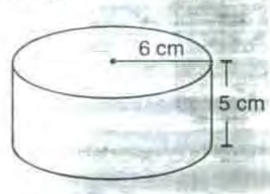
Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno.

5. Halla el área de una superficie esférica de 4.6 cm de diámetro.

6. Si consideramos la Tierra como una esfera de 12 751 km de diámetro, ¿cuál es su superficie?

7.

EMPLEA la memoria de la calculadora para hallar el área total de este cilindro.



DESAFÍO

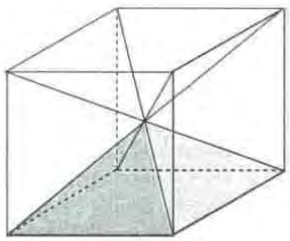
8. La semicircunferencia del semicírculo que genera una esfera tiene una longitud de 18.84 cm. ¿Cuál es su superficie esférica?

PROYECTO PARA HACER EN CASA

9. Investiga cuál será el radio de una esfera cuya superficie mide 128.61 cm².

1.4 Leer y analizar el capitulo XXIV, Pirámides y Poliedros regulares de Landaverde y en equipos de 3 resolver y presentar los primeros 20 ejercicios, la mitad de equipos los pares y la otra mitad de equipos los nones INCLUYE SÓLIDOS REGULARES.

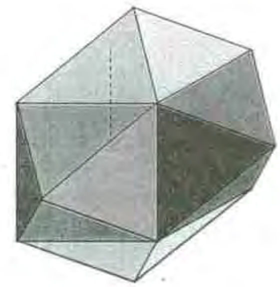
Un cubo se puede descomponer en seis pirámides iguales. Para esto, se une cada vértice con su vértice opuesto, como se muestra:



El centro del cubo, donde se intersectan todas las diagonales, es la cúspide de todas las pirámides, y cada una de ellas tiene como base una cara del cubo.

Si a cada una de las caras del cubo se le añade una de estas pirámides, lo que se obtiene es un sólido cuyas caras son rombos. Esto se debe a que cada dos triángulos están en el mismo plano.

A este sólido se le llama *rombododecaedro* o *dodecaedro rómbico.*

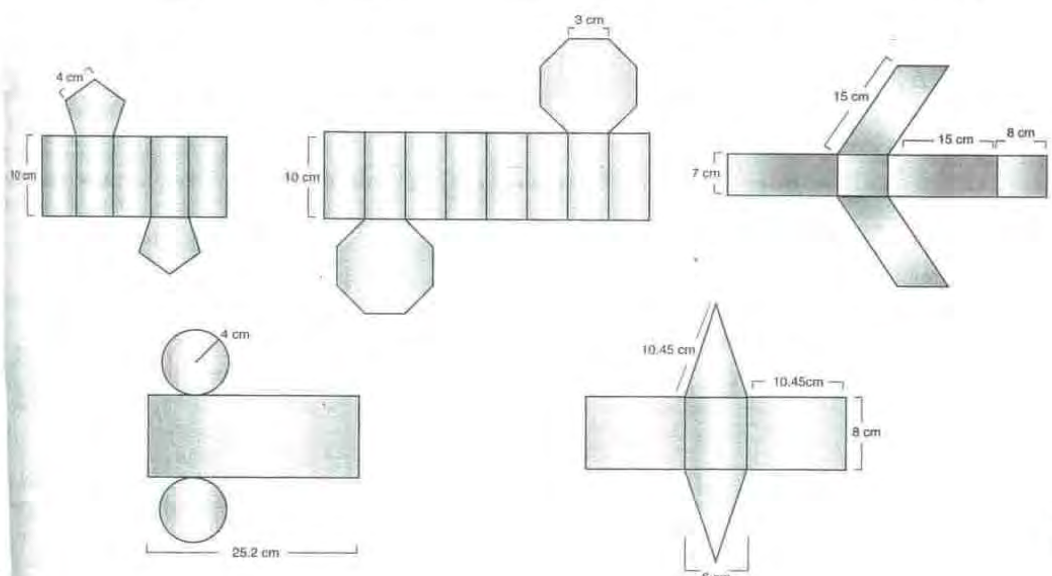


2.1 Enumerar el grupo del uno al cinco y rifar la construcción de los 5 polígonos regulares para presentarlos en la clase siguiente enunciando sus características.

2.2 Pero la señora Medina quería hacer otro tipo de cajas, que no fueran tan cuadradas y comunes como todas las cajas que venden en cualquier lado.

Puso un letrero afuera de su tienda que decía: *SE HACEN CAJAS DE LA FORMA QUE USTED QUIERA.*

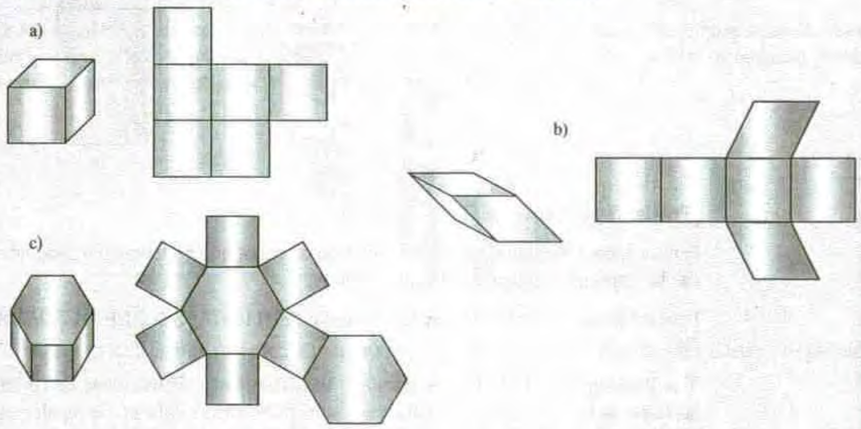
Y le llegaron pedidos de lo más extraños. Te enseñaremos algunas fotos de las cajas que hizo. Para que las hagas tú también, copia a escala, con las medidas que se indican, los siguientes desarrollos y ármalos (añade las pestañas para que puedas pegar).



EJERCICIOS

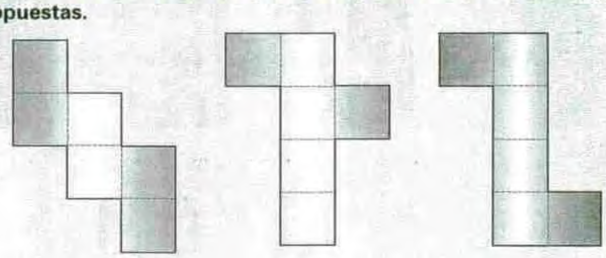
1. Construye las cajas de la lección.

2. ¿En cada inciso, corresponde el desarrollo plano a las caja?



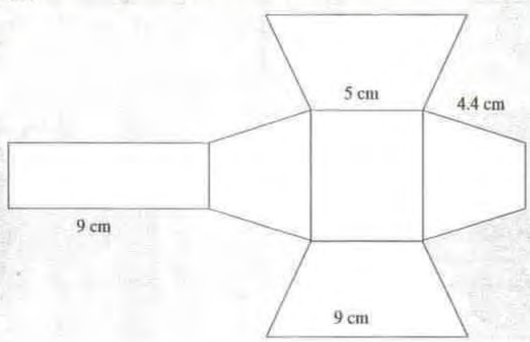
3. Diseña tres cajas y da su desarrollo plano.

4. Considera los siguientes desarrollos planos. ¿Se puede armar una caja cúbica con cada uno de ellos? Para los casos en que sí sea posible di (sin recortar y armar) cuáles caras son opuestas.



a) b) c)

4. Construye la caja que corresponde al siguiente desarrollo plano. Cópialo con las medidas incluidas.



2.3 Ampliar las 7 figuras del anexo ___ y pegarlas en papel cartoncillo para facilitar su armado, integrar equipos de 3 y presentar sus trabajos de construcción.

2.4 Enumerar el grupo del 1 al 3 de tal forma que todos hagan una demostración física.

- Los numero uno que demuestren la formula y relación que hay en el calculo del volumen de un prisma y una pirámide que tienen la misma base y altura.
- Los números dos demuestren la formula y relación que hay en el calculo del volumen de un cilindro y un cono que tienen la misma base y altura.
- Los números tres demuestren la formula para calcular el volumen de una esfera.

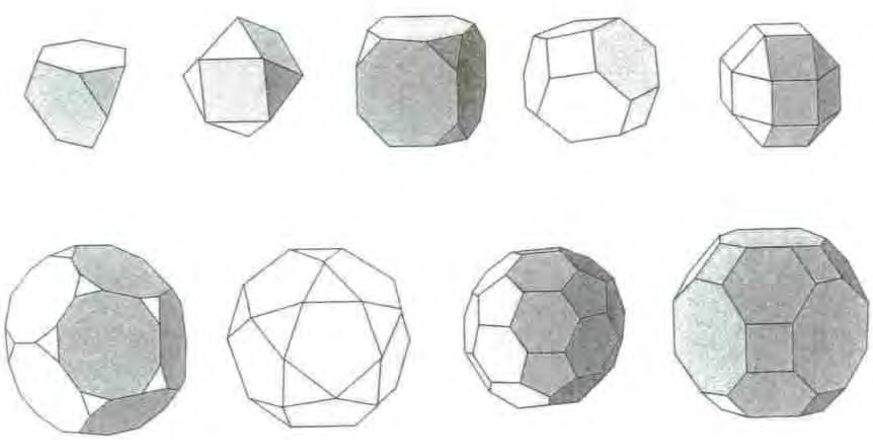
2.5 Investigar que es la cristalografía y presentar el trabajo incluyendo sus propias conclusiones.

2.6 Para cerrar el curso prepare y presente un examen de 20 reactivos mínimo que permita la retroalimentación del bloque III.

LECTURA COMPLEMENTARIA:
LOS POLÍGONOS ARQUIMEDIANOS

Su nombre se debe a Arquímedes, fue él quien los describió por primera vez.

Indicó el número de polígonos que concurren a cada vértice y el número de lados de estos polígonos. También se les llama semirregulares, ya que conservan la regularidad de sus caras y vértices, aunque no la igualdad, ya que están construidos con más de un tipo de polígonos. El balón de futbol hecho con hexágonos y pentágonos es un polígono arquimediano.



ACERTIJOS

Y

MAS

Home | Juegos Online | Reglamentos | Crucigramas | Historia | Ingenio | Enciclopedia | E-Commerce | Tableromanía

Acanomas

Juegos Tradicionales
Entretenimientos & Información

Sección Juegos de Ingenio > La Bandera Danesa

Establezca las dimensiones de una cruz cuya superficie sea la misma que el resto de la bandera.

A partir de las recientes y estériles negociaciones del Tío Sam, destinadas a comprar las Indias occidentales Danesas, salieron a la luz varias leyendas con respecto a los nombres de ese grupo de las Islas Vírgenes.

St. John, St. Thomas y St. Croix, que constituyen las Indias Occidentales Danesas, se contaron entre los primeros descubrimientos de Colón en 1492. Durante siglos se las consideró sin ningún valor, de modo que cuando algunos daneses que habían naufragado izaron su bandera pidiendo auxilio, la propiedad de las islas pasó a sus manos sin ninguna disputa y, según la costumbre, se le dio nombre a partir de los santos patronos de los marineros.

La bandera danesa es tan poco vista que comparativamente pocas personas saben que es una cruz blanca sobre un campo rojo, y jamás he sabido que la enseña haya sido diseñada de acuerdo con las regulaciones, que estipulan que la mitad del campo debe ser blanco. Suponiendo, por ejemplo, que la proporción de la bandera es de cinco pies de ancho por siete pies y medio de largo, ¿cuántos de nuestros aficionados pueden descubrir una regla simple que nos dé el espesor de una cruz blanca que ocupe exactamente la mitad del espacio?

Pintar para ver la solución :

Hay muchas maneras de resolver matemáticamente este acertijo, pero en nombre de la simplicidad, les diría a los pobres marineros daneses, que nada saben de raíces cuadradas, que restaran la mitad de la diagonal de un cuarto del perímetro de la bandera.

Como el perímetro es exactamente de 25 pies, y la diagonal es de 9,01388, debemos sustraer 4,50694 de 6,25 para obtener 1,74306 pies.

Más Acertijos
La nueva estrella
La piedra de afilar
La estrella oculta
El lingote de oro
El problema del nenúfar
El acertijo del lago
Las tres servilletas
Acres gratis
La Bandera Danesa

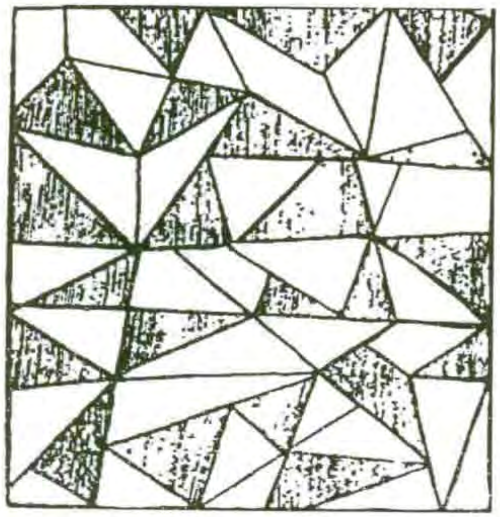
Otras categorías
Principal
Aritmética y álgebra
Fichas y piezas móviles
Geometría de disección
Geometría espacial
Geometría plana
Lógicos e investigación
Probab. y teoría de juegos
Recorridos y trazados

41

Acanomas

Juegos Tradicionales
Entretenimientos & Información

Sección Juegos de Ingenio > La estrella oculta



Descubra una estrella perfecta de cinco puntas en este dibujo

Solución

Más Acertijos
La nueva estrella
La piedra de afilar
La estrella oculta
El lingote de oro
El problema del nenúfar
El acertijo del lago
Las tres servilletas
Acres gratis
La Bandera Danesa

Otras categorías
Principal
Aritmética y álgebra
Fichas y piezas móviles
Geometría de disección
Geometría espacial
Geometría plana
Lógicos e investigación
Probab. y teoría de juegos
Recorridos y trazados

Acanomas

Juegos Tradicionales
Entretenimientos & Información

Sección Juegos de Ingenio > Solución

Solución:

Más Acertijos

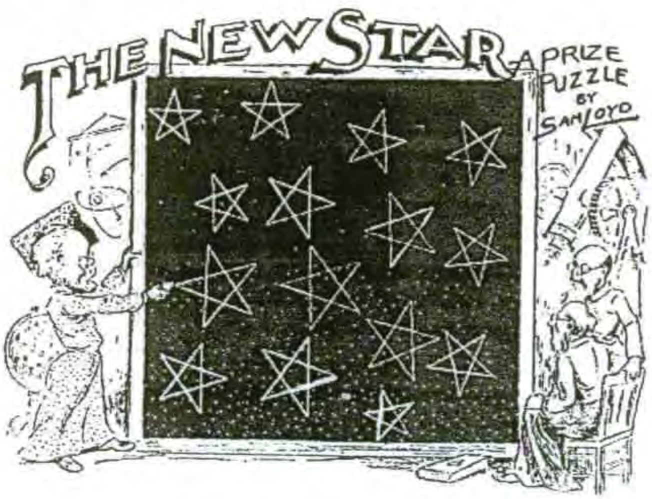
Otras categorías

Principal
Aritmética y álgebra
Fichas y piezas móviles
Geometría de disección
Geometría espacial
Geometría plana
Lógicos e investigación
Probab. y teoría de juegos
Recorridos y trazados

Acanomas

Juegos Tradicionales
Entretenimientos & Información

Sección Juegos de Ingenio > La nueva estrella



¿Dónde puede situarse otra estrella de primera magnitud?

Este extraño acertijo está concebido a partir de la reciente afirmación de un astrónomo francés que asegura haber identificado una nueva estrella de primera magnitud.

La ilustración muestra al erudito profesor describiendo su nuevo descubrimiento a sus colegas astrónomos. Ha dibujado la posición de quince estrellas de diferentes magnitudes, y ahora está a punto de mostrar cuál es la posición que ocupa en el cielo su nuevo descubrimiento.

¡Vean si pueden dibujar la forma de una estrella de cinco puntas que sea tanto más grande que cualquiera de las otras pero que no toque a ninguna de ellas!

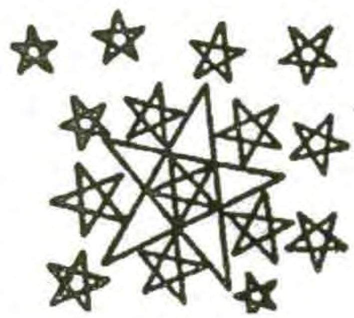
Solución

Más Acertijos
La nueva estrella
La piedra de afilar
La estrella oculta
El lingote de oro
El problema del nenúfar
El acertijo del lago
Las tres servilletas
Acres gratis
La Bandera Danesa

Otras categorías
Principal
Aritmética y álgebra
Fichas y piezas móviles
Geometría de disección
Geometría espacial
Geometría plana
Lógicos e investigación
Probab. y teoría de juegos
Recorridos y trazados

Acanomas Entretenimientos & Información

[illegible]:
[illegible]



Más Acertijos

[illegible]

Haz
click
aquí

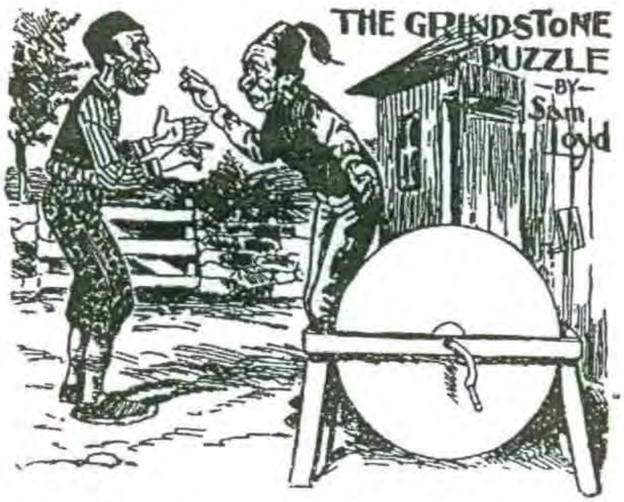
Ingenio | Enciclopedia | Tableromanía

Acanomas.com : El mundo de los Juegos   Acerca de Acanomas.com

Acanomas

Juegos Tradicionales
Entretenimientos & Información

Sección Juegos de Ingenio > La piedra de afilar



¿Cómo era de grande la piedra cuando pasó al segundo hombre?

Se dice que dos sirios honestos reunieron sus ahorros y compraron una piedra de afilar. Como vivían a varias minas de distancia, convinieron que el mayor conservaría la piedra hasta que el tamaño de ésta se hubiera reducido a la mitad, y luego se la daría al otro hombre.

La piedra tenía un diámetro exacto de 22 pulgadas, con un orificio de 3 pulgads 1/7 en el centro de la manija, como Lo muestra el dibujo.

¿Cuál sería el diámetro de la piedra al recibirla el segundo hombre?

Solución

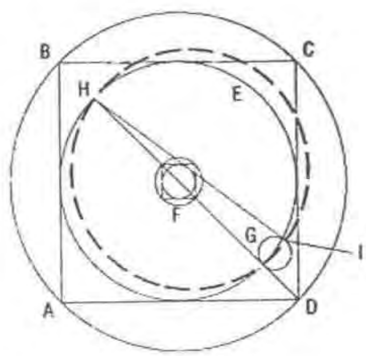
Acanomas

Juegos Tradicionales
Entretenimientos & Información

Sección Juegos de Ingenio > Solución

Solución:

El mejor método para resolver este problema se basa en el hecho de que las superficies de los círculos son proporcionales al cuadrado de sus diámetros. Si inscribimos un cuadrado ABCD en un círculo que tenga el tamaño original de la piedra de afilar, el círculo E, inscrito dentro de ese cuadrado, tendrá la mitad de la superficie del círculo mayor.



Ahora debemos agregar al círculo E la mitad de la superficie del orificio de la piedra. Para hacerlo, inscribimos un pequeño cuadrado en el orificio F, y dentro de este cuadrado inscribimos un círculo. El círculo más pequeño será, por lo tanto, la mitad de la superficie del orificio. Colocamos el pequeño círculo en G, haciendo que su diámetro forme un cateto de un triángulo rectángulo, cuyo otro cateto es el diámetro del círculo E. La hipotenusa HI tendrá entonces el diámetro de un círculo cuya área es igual a las áreas combinadas del círculo E y el pequeño círculo G. Este círculo, que aparece en línea de puntos, representa el tamaño de la piedra cuando ya ha sido usada a medias. Su diámetro puede calcularse de la siguiente manera:

El diámetro del círculo E es igual al lado del cuadrado más grande. Sabiendo que la diagonal de este cuadrado es de 22 pulgadas, llegamos a la conclusión de que la raíz cuadrada de 242 es el lado del cuadrado y el diámetro del círculo E. Un procedimiento similar demuestra que el diámetro del círculo más pequeño equivale a la raíz cuadrada de 242/49.

El cuadrado del diámetro del círculo en línea punteada es igual a la suma de los cuadrados de los dos diámetros ya citados. De modo que sumamos 242 a 242/49 para obtener 12.100/49, cuya raíz cuadrada es 110/7 ó 15 y 5/7. Este es el diámetro en pulgadas del círculo punteado, y la respuesta correcta al problema.

Más Acertijos

Otras categorías

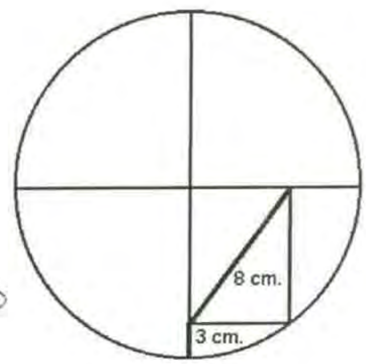
LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO

La geometria del espacio presenta a veces gran dificultad de comprensión, debido a una escasa visión espacial. En gran parte, esta dificultad es consecuencia de tener que representar sobre el plano lo que se ve en el espacio. Por tanto, conviene tener muy claros los elementos fundamentales de la geometria del espacio, que son el punto, la recta y el plano.

Existen en la actualidad gran número de impresionantes grabados, en los que se explotan magistralmente ilusiones geométricas, que en último término consisten en la exclusión velada de algunos axiomas de la geometría euclídea.

Hay problemas geométricos que nos dejan perplejos porque la respuesta elemental, a menudo se complica de un modo inverosímil.

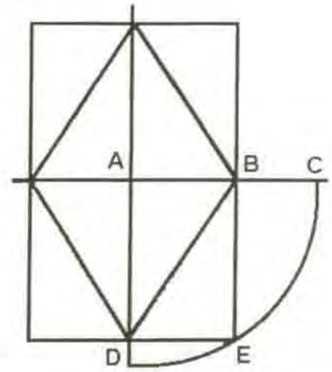
1. EL RADIO DEL CÍRCULO. Teniendo en cuenta la figura, hallar el radio del círculo.



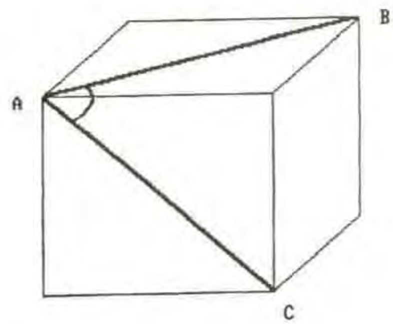
SI NECESITA LAS SOLUCIONES
COMUNICAR. CON
PROFR. JOSE LUIS ANGUIANO
UNIDAD CD. JUAREZ

2. EL LADO DEL ROMBO. En una plaza circular de R=9 m. se quiere construir un estanque de forma rómbica, según la figura.

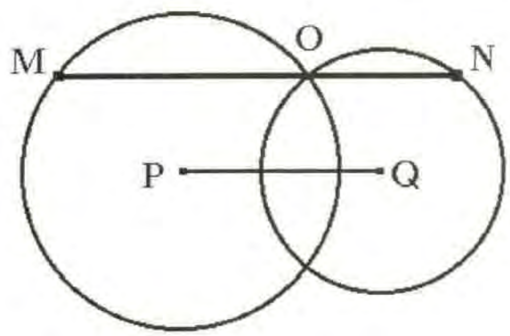
¿Cuánto mide el lado del rombo?



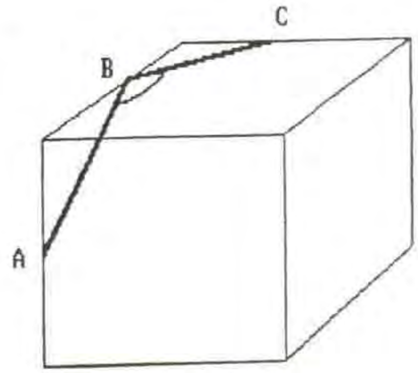
3. EL ÁNGULO DE LAS DIAGONALES. ¿Cuántos grados mide el ángulo que forman las dos diagonales de las caras del cubo?



4. GOLPE DE VISTA. Dos circunferencias secantes tienen por centros P y Q respectivamente. El segmento PQ mide 3 centímetros. Por uno de los puntos (O) donde se cortas las circunferencias trazamos una recta paralela al segmento PQ. Sean M y N los puntos donde corta dicha recta a las circunferencias. ¿Cuánto mide MN?

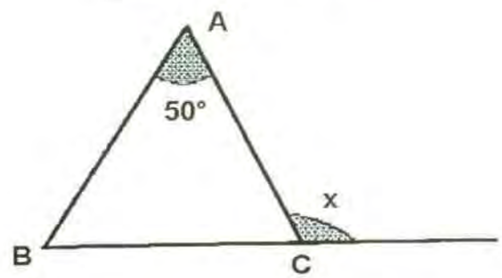


5. EL ANGULO OBTUSO. ¿Cuánto mide el ángulo obtuso ABC? A, B y C son los puntos medios de los lados.

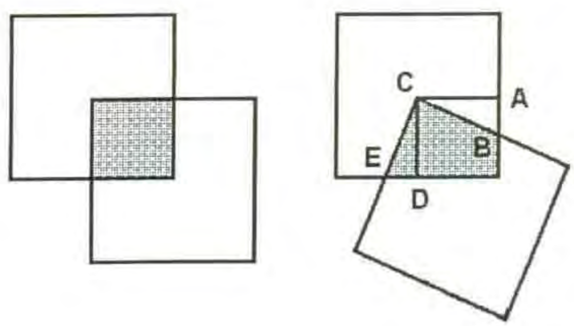


6. EL ÁNGULO EXTERIOR. En el triángulo isósceles ABC el ángulo A mide 50 .

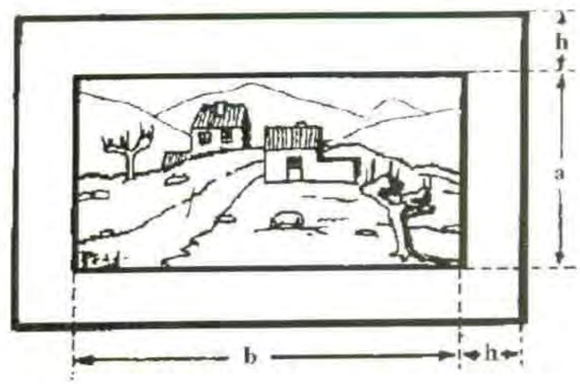
¿Cuál es la medida del ángulo x?



7. CUADRADOS QUE SE CORTAN. Tenemos dos cuadrados iguales superpuestos, de manera que un vértice de uno está siempre en el centro del otro. ¿En qué posición el área comprendida entre los dos cuadrados es la mayor posible?



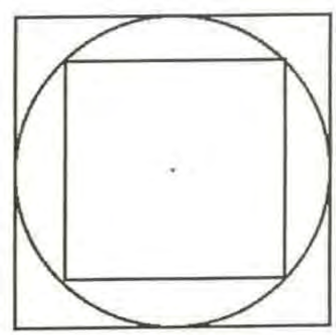
8. <u>SEMEJANZA DE RECTÁNGULOS</u>. Si el ancho de un marco es igual en sus dos direcciones, horizontal y vertical, como sucede casi siempre, el rectángulo constituido por el cuadro completo y el rectángulo de la tela pintada ¿serán semejentes?



9. <u>PAQUETE POSTAL</u>. Un hombre quiere enviar por correo un fluorescente que mide 92 cm. de largo, pero las normas de Correos prohiben los paquetes postales superiores a 55 cm. ¿Cómo podría enviar el objeto por correo sin romperlo, ni doblarlo ni faltar a las ordenanzas de Correos?

10. <u>LOS DOS CUADRADOS</u>. A una circunferencia pueden inscribirse y circunscribirse cuadrados como muestra la figura adjunta.

Sabiendo que el área del cuadrado inscrito es de cuatro unidades de superficie, ¿qué área tiene el cuadrado mayor?



<u>EDUCANDO LA INTUICIÓN</u>. Algunas situaciones parecen ir contra la intuición. Y no se trata de salir del paso diciendo aquello de que «si la realidad se opone a mis ideas, peor para la realidad». La intuición, como la capacidad deductiva, puede ser afinada, educada. Intentamos hacerlo a través de los siguientes problemas.

11. <u>EL CINTURÓN DE LA TIERRA</u>. Imaginemos un cordel que envuelve como un cinturón ajustado la Tierra a lo largo de la línea del Ecuador. Añadámosle un metro al cordel. Cuán flojo queda ahora?

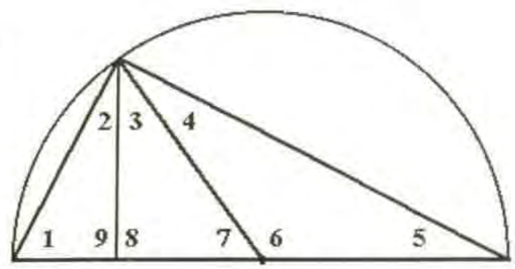
La intuición indicaría que la holgura que se obtiene es pequeñísima, ya que el metro agregado representa muy poco respecto a la circunferencia de la Tierra. Más inquietante es pensar que si ajustamos un cordel alrededor de una naranja, y le agregamos luego un metro, la holgura que se consigue para la naranja es exactamente la misma que para la Tierra. ¿Será cierto?

12. EL CORDEL Y EL CUADRADO. ¿Que pasaria si la Tierra fuese cuadrada?

13. EL RIEL DILATADO. Imaginemos un tramo recto de riel, AB, de 500 metros de largo, aplanado sobre el suelo y fijado en sus dos extremos. Bajo el calor del verano, el riel se expande 2 metros, provocándole una joroba. Suponiendo que el riel se arquea en forma simétrica, ¿a qué altura cree usted que se levanta la joroba en el punto medio? ¿Diez centimetros? ¿Un metro? ¿Diez metros?

14. EL PUENTE SIN DISPOSITIVO DE DILATACIÓN. Un puente metálico tiene 1 km. de longitud. Debido al calor se dilata 20 cm. Si no se hubiese previsto un medio de absorber esta dilatación, el puente se levantaria formando un triángulo isósceles de altura h. La base seria el puente antes de la dilatación. ¿Cuánto vale h?

15. NUEVE ÁNGULOS. Calcula el valor de todos los ángulos de la figura sabiendo que el ángulo 1 vale 70 .



16. ÁREA DE LA CORONA CIRCULAR. Supongamos dos circunferencias concéntricas. Trazamos una tangente a la interior que, naturalmente cortará a la exterior en dos puntos. La distancia entre cualquiera de estos puntos y el punto de tangencia es 1 m.. Halla el área de la corona circular que determinan las dos circunferencias.

17. SIMETRÍA Y REFLEXIÓN. La imagen en un espejo plano y el objeto reflejado no son iguales, sino simétricos. El producto de dos reflexiones es la igualdad. Estas dos sencillas propiedades nos permitirán gastar una pequeña broma, cuando escribamos a un amigo utilizando un papel carbón y dos cuartillas.

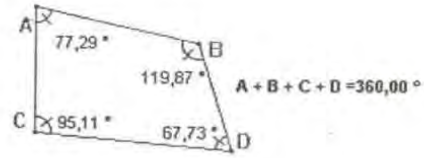
La siguiente carta se la mandé a un amigo mío. ¿Sabe Vd. lo que le pone?

CUADRILÁTEROS

Página inicial

Un cuadrilátero es un polígono de 4 lados.

La suma de los ángulos interiores es 360º.

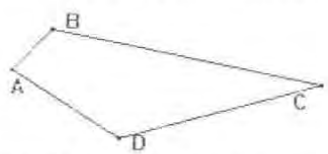


En todo lo que se escribe a continuación, nos referimos a cuadriláteros no cruzados, esto es, excluimos figuras del tipo que se representa a la derecha. Sin entrar en la discusión de si son o no cuadriláteros, que en todo caso dependerá de la definición que se tome.

CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS

La primera gran división que podemos realizar es cuadriláteros convexos y cuadriláteros no convexos, llamados puntas de flecha o deltoides.

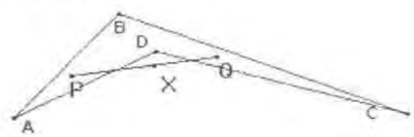
CUADRILÁTERO CONVEXO



Cada uno de los ángulos interiores es menor de 180º.

O bien, dados dos puntos cualesquiera interiores al cuadrilátero, el segmento que los une tiene todos sus puntos interiores al cuadrilátero.

CUADRILÁTERO NO CONVEXO (CÓNCAVO)



Uno de los ángulos (D) es mayor de 180º.

Podemos encontrar dos puntos, P, Q, tales que el segmento PQ tenga puntos, X, exteriores al cuadrilátero

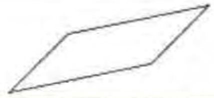
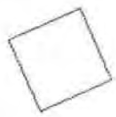
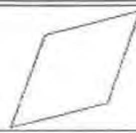
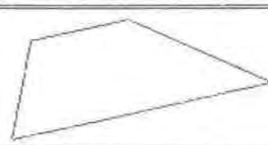
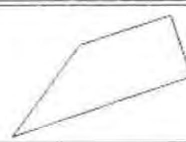
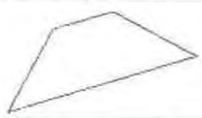
CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS CONVEXOS.

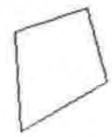
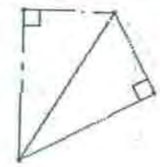
La clasificación más extendida es atendiendo al **paralelismo de sus lados**, se tiene:

CUADRILÁTEROS CONVEXOS	**Dos pares de lados paralelos**	**Paralelogramos**
	Dos lados paralelos y los otros dos no paralelos	**Trapecios**
	Ningún lado paralelo	**Trapezoides** o simplemente cuadriláteros.

Pinchando en los dibujos se accede al applet correspondiente.

CUADRILÁT

	1.- PARALELOGRAMO		Lados paralelos dos a dos	
PARALELOGRAMOS	**RECTÁNGULO**		Paralelogramo que tiene los 4 ángulos iguales. Esto es cuatro ángulos rectos.	
PARALELOGRAMOS	**CUADRADO**		Tiene lados iguales y ángulos iguales. **Cuadrilátero regular.**	Tiene cuatro ángulos rectos, y por tanto es un rectángulo. Tiene cuatro lados iguales y en consecuencia es un rombo.
PARALELOGRAMOS	**ROMBO**		Paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales.	
	2.-TRAPECIO		Dos de sus lados, (normalmente llamados bases) son paralelos.	
TRAPECIOS	**TRAPECIO RECTÁNGULO**		Un lado perpendicular a las bases. O bien Tiene dos ángulos rectos.	
TRAPECIOS	**TRAPECIO ISÓSCELES**		Los lados no paralelos son de igual longitud.	
TRAPECIOS	TRAPECIO ESCALENO	A veces encontramos la nomenclatura de trapecio escaleno para referirse a los no rectángulos ni isósceles. Me parece innecesario. Llamémosle **trapecio**, sin apellidos.		
	3.-TRAPEZOIDE	Algunos libros denominan así a los cuadriláteros que no tienen lados paralelos. En mi opinión sobra este nombre. Es un **cuadrilátero**, sin más.		

E R O S	**ROMBOIDE** ** o **COMETA** ** Hay autores que denominan Romboide al paralelogramo que no es ni rectángulo ni rombo.		Cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales. Se debe a Rey Pastor la utilización de la palabra Romboide para referirse a esta figura.
		Existe un caso particular especialmente interesante, el romboide o cometa que tiene dos ángulos rectos. Desconozco si tiene nombre especifico, me permito llamarle romboide rectángulo. Entre otras propiedades, este romboide es inscriptible y circunscriptible.	

Páginas con información sobre cuadriláteros:

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/1y2_eso/Los_cuadrilateros/Cuadrilateros.htm con applet Descartes.

http://www.math.nmsu.edu/breakingaway/Lecciones/kites/kites.html trata el tema de cometas y actividades con ellas.

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/geometri/cuadri.htm Aula Virtual de Geometría.

http://www.uaq.mx/matematicas/origami/ejerc.html cuadriláteros mediante doblado de papel.

www.uaq.mx/matematicas/origami/ejerc.html diapositivas en Power Point sobre cuadriláteros.

http://docentes.uacj.mx/flopez/Cursos/Geometria/Unidades/default.htm pagina dedicada a la geometría euclidiana.

http://www.escolar.com/geometr/06cuadrila.htm Guía rápida. La clasificación y nomenclatura es diferente a la dada aquí.

http://icarito.tercera.cl/enc_virtual/matemat/triangulo/trian13.html

http://www.sapiens.ya.com/geolay/pagehtm/geometria.htm Clasificación de cuadriláteros muy bien ordenada, con fórmulas de áreas y perímetros.

http://personal.telefonica.terra.es/web/jmora7/Archiv/95recunog.pdf un trabajo muy interesante de Jose A. Mora. accesible desde la página http://teleline.terra.es/personal/joseantm/ del mismo autor. Si te gusta la geometría, y cabri, esta página es de visita obligada.

LOS CUADRILÁTEROS

Tipos de cuadriláteros. Propiedades

Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros tienen distintas formas pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales. En todos los cuadriláteros la suma de los ángulos interiores es igual a 360°.

Los cuadriláteros se clasifican según el paralelismo de sus lados.

Los **paralelogramos** son cuadriláteros cuyos lados opuestos son paralelos dos a dos.

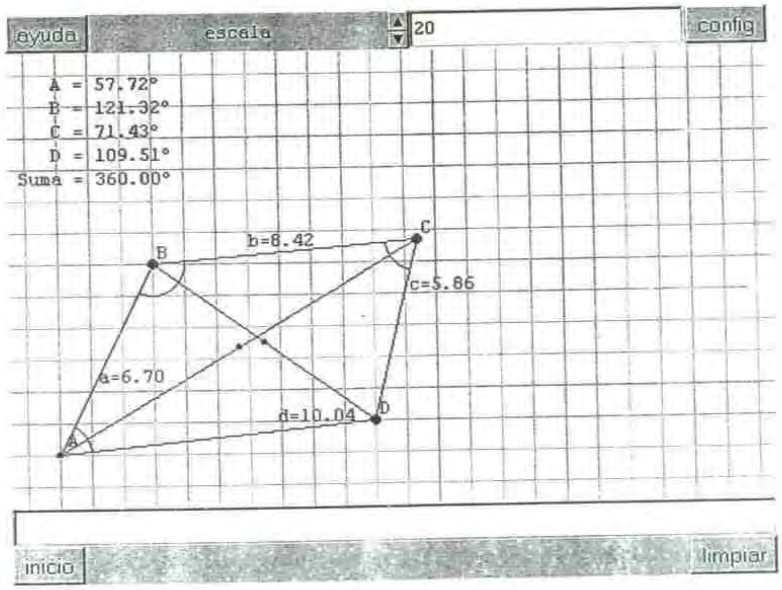
Además, todos los paralelogramos verifican las siguientes propiedades:

- Los lados opuestos tienen la misma longitud.
- Los ángulos opuestos son iguales.
- Las diagonales se cortan en su punto medio.

Los **trapecios** son cuadriláteros que tienen sólo dos lados opuestos paralelos.

Los **trapezoides** son cuadriláteros cuyos lados no son paralelos.

1. Arrastra con el ratón los puntos B, C y D y construye tres cuadriláteros de cada clase: tres paralelogramos, tres trapecios y tres trapezoides. En cada caso, anota en tu cuaderno las medida de los lados y de los ángulos. Observa que en el caso de los paralelogramos se cumplen las tres propiedades descritas.



Los paralelogramos

A su vez, los paralelogramos se dividen en tres clases:

- Los **rectángulos**, que tienen los cuatro ángulos iguales.
- Los **rombos**, que tienen los cuatro lados iguales.
- Los **cuadrados**, que tienen los cuatro ángulos iguales y los cuatro lados iguales.
- Los paralelogramos propiamente dicho, es decir, aquéllos que no son rectángulos, ni rombos, ni cuadrados también se llaman **romboides**.

2. En la escena siguiente mueve los tres vértices B, C y D del cuadrilátero para construir los siguientes paralelogramos. Anota en cada caso el valor de las diagonales y observa sus medidas, así como el ángulo que forman. En los rectángulos y cuadrados, comprueba el valor de las diagonales. En los rombos comprueba la relación entre la mitad de las diagonales y la medida de su lado.

a. Un rectángulo de lados 5 y 8 unidades de longitud. ¿Cuanto miden los cuatro ángulos de un rectángulo? Aplica el teorema de Pitágoras para comprobar el valor de las diagonales.

b. Un rectángulo de lados 10 y 7 unidades de longitud.

c. Un rombo de lado 7 unidades de longitud y uno de cuyos ángulos mida 30°. Anota la medida de los otros ángulos del rombo. Observa que en los rombos las diagonales son siempre perpendicules y dividen al rombo en cuatro triángulos rectángulos iguales. Comprueba el teorema de Pitágoras en esos triángulos.

d. Un rombo de lado 10 unidades de longitud y uno de cuyos ángulos mida 25°. Anota la medida de los otros ángulos del rombo. Comprueba el teorema de Pitágoras en el triángulo formados por un lado y las diagonales del rombo.

e. Un cuadrado de lado 8 unidades de longitud. Comprueba la medida de las diagonales.

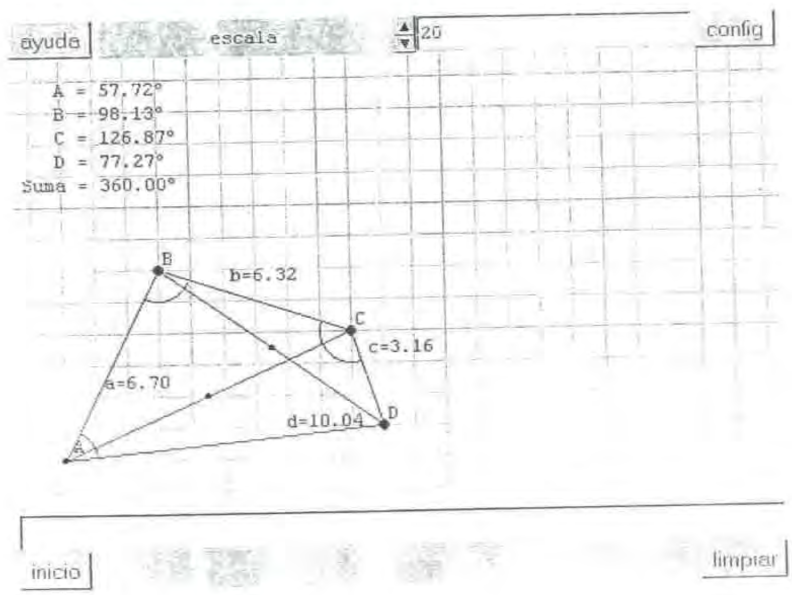
f. Un cuadrado de lado 12 unidades de longitud. Comprueba la medida de las diagonales.

g. Un romboide cuyos lados contiguos midan 9 y 7 unidades de longitud y uno de cuyos ángulos mida 30°. Anota la medida de los otros ángulos del romboide.

h. Un romboide cuyos lados contiguos midan 6 y 10 unidades de longitud y uno de cuyos ángulos midan 40°. Anota la medida de los otros ángulos del rombide.

i. ¿Qué relación hay entre las longitudes diagonales de los paralelogramos en cada clase?

j. ¿Observas alguna característica en el ángulo que forman las diagonales en cada clase de paralelogramo?



3. De un rectángulo se conoce un lado, que mide 4 cm y su diagonal que mide 5 cm. ¿Cual

es la medida del otro lado? Construye en la escena anterior un rectángulo con esas medida para comprobar la corrección de tu resultado.

Los trapecios

Los trapecios son cudriláteros que tienen dos lados paralelos, de distinta longitud. Los otros dos lados no son paralelos.

Hay tres tipos de trapecios:

- Los **trapecios rectángulos** que tienen dos ángulos rectos, de 90º.
- Los **trapecios isósceles**, cuyos lados no paralelos tienen la misma longitud.
- Los **trapecios escalenos**, que son todos los demás.

4. En la escena siguiente construye los siguientes trapecios. En cada caso anota en tu cuaderno las medidas de los ángulos.

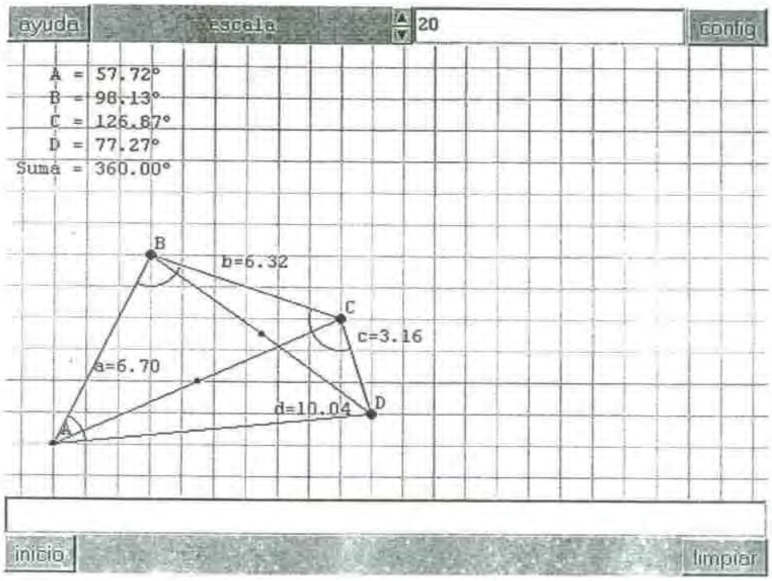
a. Un trapecio rectángulo cuyos lados paralelos midan 8 y 13 unidades de longitud y su lado contiguo a los ángulos rectos mida 6 unidades de longitud.

b. Un trapecio rectángulo cuyos lados paralelos midan 4 y 10 unidades de longitud y su lado contiguo a los ángulos rectos mida 5 unidades de longitud.

c. Un trapecio isósceles cuyos lados paralelos midan 8 y 13 unidades de longitud y sus lados no paralelos midan 6 unidades de longitud.

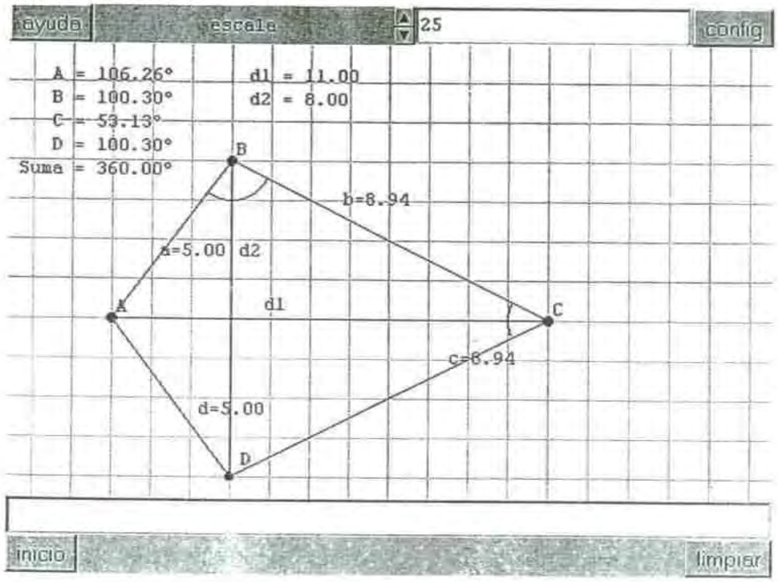
d. Un trapecio isósceles cuyos lados paralelos midan 4 y 10 unidades de longitud y sus lados no paralelos midan 5 unidades de longitud.

e. Un trapecio escaleno cuyos lados paralelos midan 8 y 13 unidades de longitud y sus lados no paralelos midan 5 y 7 unidades de longitud.



Las cometas

5. Una cometa es un trapezoide muy especiales: sus diagonales se cortan perpendicularmente en el punto medio de una de ellas. Mueve los vértices A, B y C de la cometa de la escena siguiente para construir tres cometas distintas; la primera cuyas diagonales midan 6 y 8 unidades de longitud, la segunda, de 10 y 5 unidades, y la tercera, de 12 y 7 unidades. Anota en el cuaderno los datos de las cometas (longitudes de los lados y de las diagonales y medidas de los ángulos). Investiga la relación entre los lados y entre los ángulos de las cometas. Escribe en el cuaderno las relaciones que has encontrado.



6. Las diagonales de un rombo miden 12 y 8 cm. Calcula la medida de su lado. En la escena anterior construye un rombo con esas dimensiones para comprobar la corrección de tu resultado.

Cálculo del perímetro y del área de un cuadrilátero

Autor: Fernando Arias Fernández-Pérez

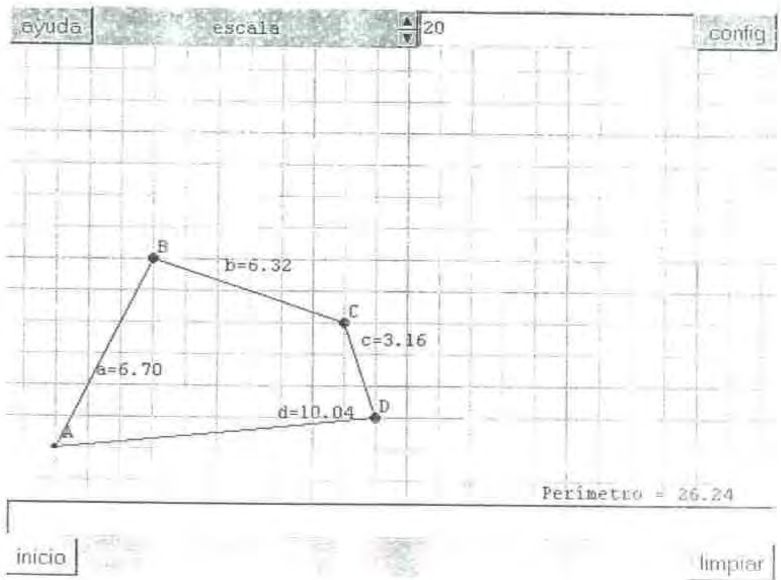
LOS CUADRILÁTEROS

Cálculo del perímetro y del área

El perímetro de un cuadrilátero

El perímetro de un cuadrilátero es la longitud de la línea cerrada que lo bordea, es decir, la suma de las longitudes de sus cuatro lados.

7. Calcula y escribe el tu cuaderno el valor del perímetro de los caudriláteros que has construido en los ejercicios 2 y 3 anteriores. En la escena siguiente mueve los vertices A, B y C del cuadrilátero para construir esos cuadriláteros y en cada caso comprueba el resultado del perímetro que has hallado con el que aparece en la figura.



El área de un rectángulo

A la medida de la extensión de la superficie de un cudrilátero, es decir, de la porción del plano linitada por la línea cerrada que lo determina se llama área del cudrilátero. Las unidades de superficie del sistema métrico decimal es el **metro cuadrado** (m^2) y sus **múltiplos**: decámetro cuadrado (Dm^2), hectóametro cuadrado (hm^2) y kilómetro cuadrado (km^2) y **submultiplos**: decímetro cuadrado (dm^2), centímetro cuadrado (cm^2) y milímetro cuadrado (mm^2), según el tamaño del cuadrilátero que queramos medir. En la escena siguiente hay una retícula dibujada con cuadraditos de 1 cm^2, que vamos a utilizar como unidad patrón de superficie. La base del rectángulo dibujado (el lado horizontal) mide 5cm y su altura (el lado vertical) mide 3 cm. Para calcular el área de la superficie limitada por el rectángulo contamos los cuadraditos patrón que hay en su interior, es decir, $15=5 \cdot 3$. Luego el área del rectángulo medirá 15 cm^2. En general,

el área de un rectángulo de lados *b* y *a* mide $A = b*a$ ***(Área = base * altura)***

8. Calcula y escribe en tu cuaderno el área de los rectángulos en los siguientes casos:

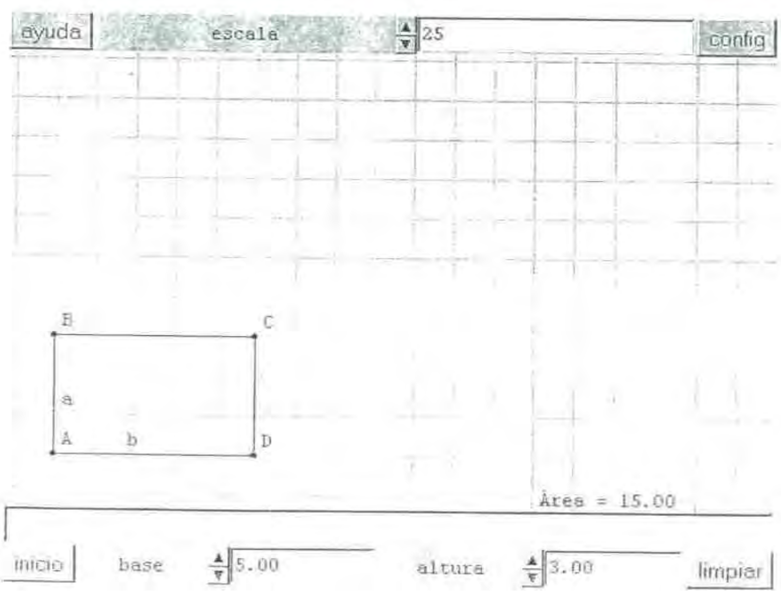
8.1. b= 5; a=4

8.2. b= 7.35; a=3.2

8.3. b= 16.45; a=8.7

8.4. b= 10; a=10

En la escena siguiente modifica a y b para asignarle los valores anteriores y observa el valor del área correspondiente.

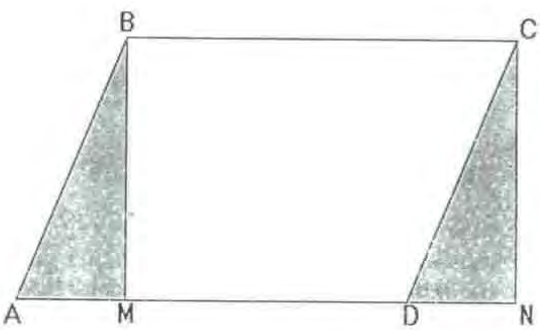


Observa que en el caso del cuadrado, su área es igual a l^2 siendo l la medida de su lado.

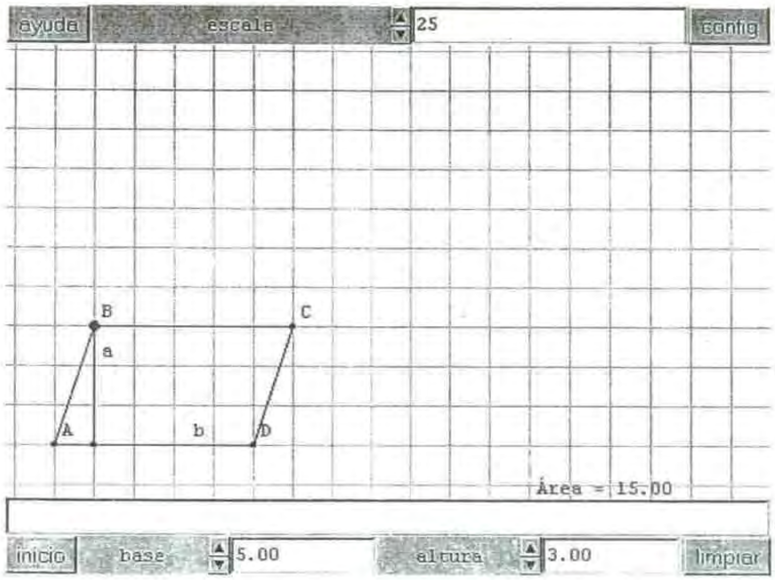
El área de un paralelogramo

Observa que en la siguiente figura, si recortamos paralelogramo ABCD el triángulo ABM y lo colocamos a la derecha del lado CD obtenemos el rectángulo MBCN que tiene la misma superficie que el paralelogramo original. Por tanto,

el área de un paralelogramo cualquiera es $A = base * altura$

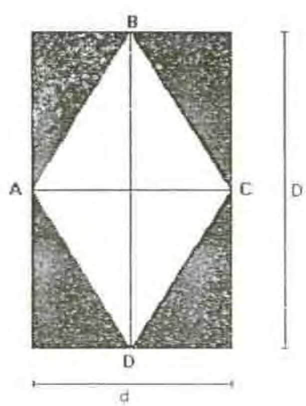


9. En la escena siguiente construye paralelogramos cuyas base y altura midan los mismos valores que en ejercicio 5 anterior. Puedes arrastrar el vértice B para variar los ángulos del paralelogramo y observa que la medida de su superficie coincide con la del rectángulo correspondiente, independiente de los ángulos del mismo, ya que se mantienen inalterados su base y su altura.



El área de un rombo

En la figura siguiente un rombo está inscrito en un rectángulo. Los vértices del rombo coinciden cion los puntos medios de los lados del rectángulo. Las medidas de los lados del rectángulo coinciden con las de las diagonales del rombo.



La figura la puedes construir fácilmente con un folio. Dobla el por la mitad en los dos sentidos del papel. Así obtienes los puntos medios de los bordes del folio. Dibuja con tu regla cuatro líneas rectas uniendo los puntos medios de los bordes consecutivos del folio. Con ello has dibujado el rombo ABCD. Recorta con unas tijeras los cuatro triángulos y colócalos para cubrir el rombo. Es fácil observar la superficie de los cuatro triángulos coincide con la del rombo o, lo que es lo mismo, el área del rombo es la mitad que la del rectángulo. Por tanto, el área de un rombo es

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{D \cdot d}}{\mathbf{2}}$$

donde D y d son las medidas de las dos diagonales del rombo.

10. Calcula el área de los rombos cuyas diagonales miden:

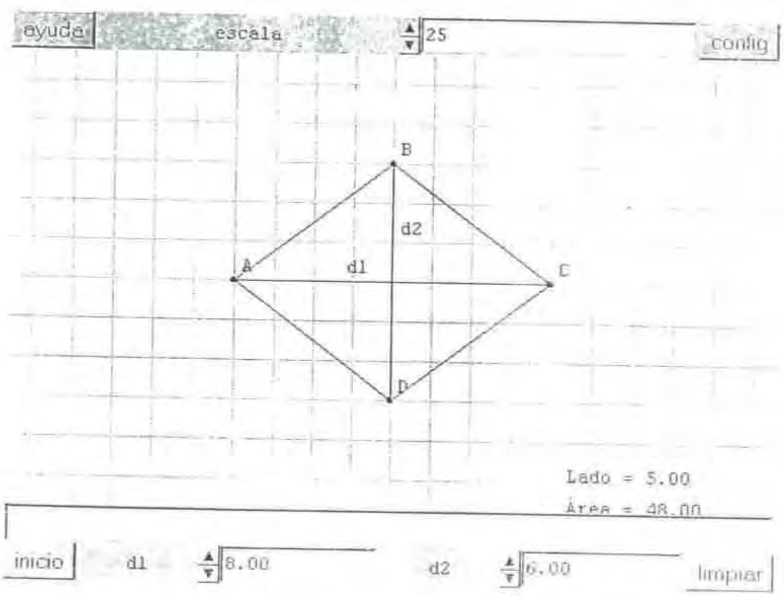
10.1. 7 y 10

10.2. 5,5 y 7,8

10.3. 21,8 y 20,9

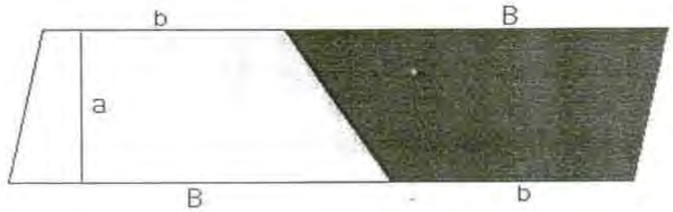
Calcula, aplicando el teorema de Pitágoras, la medida del lado del rombo.

En la escena siguiente asígnale esos valores anteriores a las dos diagonales. Compara los resultados que has obtenido para el áera y el lado del rombo con los que te ofrece el gráfico.



El área de un trapecio

Recorta con unas tijeras dos trapecios iguales de la forma que quieras. Dale la vuelta a uno de ellos y únelo al otro por uno de los lados no paralelos como en la siguiente figura:



Al hacer esta operación obtienes un paralelogramo cuya base es la suma de los dos lados paralelos (llamados bases) del trapecio, B y b, y la altura a es la altura del trapecio. El superficie del trapecio es la mitad de la del paralelogramo. Por tanto,

El área de un trapecio de bases B y b y altura a es igual a la semisuma de las bases por la altura

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot a$$

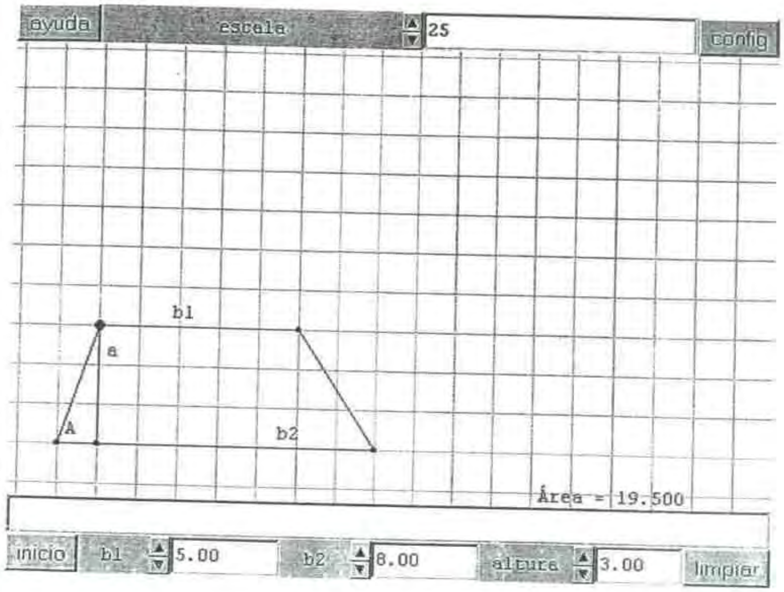
11. Calcula el área de los siguientes trapecios:

11.1. bases 7 y 10 y altura 8 unidades de longitud.

11.2. bases 5,5 y 7,8 altura 10,1 unidades de longitud.

11.3. bases 21,8 y 20,9 altura 9,5 unidades de longitud.

En cada caso, construye en la escena siguiente un trapecio con las medidas indicadas. Arrastra el vértice B horizontalmente. Con ello obtendrás trapecios de diversas formas, pero los valores de sus bases y de su altura no cambian y por ello, tampoco el de su área.

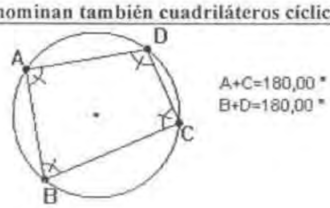
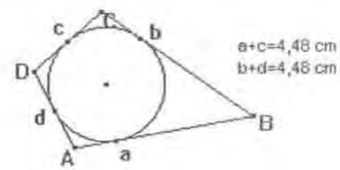


Tipos de cuadriláteros. Características

Autor: Fernando Arias Fernández-Pérez

CUADRILÁTEROS INSCRIPTIBLES Y CIRCUNCRIPTIBLES.

En un triángulo, siempre es posible trazar una circunferencia que pase por sus vértices, (circunferencia circunscrita) y otra tangente a sus lados (circunferencia inscrita), pero en un cuadrilátero, en general esto no es posible, si en algunos casos particulares.

CUADRILÁTEROS INSCRIPTIBLES. Se denominan también cuadriláteros cíclicos.	CUADRILÁTEROS CIRCUNSCRIPTIBLES.
	
Un cuadrilátero es inscriptible , si sus ángulos opuestos son suplementarios.	Un cuadrilátero es circunscriptible si la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos.

BLOQUE

I

ALGO DE HISTORIA

(71)

HISTORIA DE LA GEOMETRÍA

Geometría (del griego geo, 'tierra'; metrein, 'medir'), rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y diámetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos. Otros campos de la geometría son la geometría analítica, geometría descriptiva, topología, geometría de espacios con cuatro o más dimensiones, geometría fractal, y geometría no euclídea.

Geometría demostrativa primitiva

El origen del término geometría es una descripción precisa del trabajo de los primeros geómetras, que se interesaban en problemas como la medida del tamaño de los campos o el trazado de ángulos rectos para las esquinas de los edificios. Este tipo de geometría empírica, que floreció en el Antiguo Egipto, Sumeria y Babilonia, fue refinado y sistematizado por los griegos.

En el siglo VI a.C. el matemático **Pitágoras** colocó la piedra angular de la geometría científica al demostrar que las diversas leyes arbitrarias e inconexas de la geometría empírica se pueden deducir como conclusiones lógicas de un número limitado de axiomas, o postulados. Estos postulados fueron considerados por Pitágoras y sus discípulos como verdades evidentes; sin embargo, en el pensamiento matemático moderno se consideran como un conjunto de supuestos útiles pero arbitrarios.

Un ejemplo típico de los postulados desarrollados y aceptados por los matemáticos griegos es la siguiente afirmación: "una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos". Un conjunto de teoremas sobre las propiedades de puntos, líneas, ángulos y planos se puede deducir lógicamente a partir de estos axiomas.

Entre estos teoremas se encuentran: "la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a la suma de dos ángulos rectos", y "el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados" (conocido como teorema de Pitágoras).

La geometría demostrativa de los griegos, que se ocupaba de polígonos y círculos y de sus correspondientes figuras tridimensionales, fue mostrada rigurosamente por el matemático griego Euclides, en su libro "Los elementos". El texto de Euclides, a pesar de sus imperfecciones, ha servido como libro de texto básico de geometría hasta casi nuestros días.

Primeros problemas geométricos

Los griegos introdujeron los problemas de construcción, en los que cierta línea o figura debe ser construida utilizando sólo una regla de borde recto y un compás. Ejemplos sencillos son la construcción de una línea recta dos veces más larga que una recta dada, o de una recta que divide un ángulo dado en dos ángulos iguales.

Tres famosos problemas de construcción que datan de la época griega se resistieron al esfuerzo de muchas generaciones de matemáticos que intentaron resolverlos: la duplicación del cubo (construir un cubo de volumen doble al de un determinado cubo), la cuadratura del círculo (construir un cuadrado con área igual a un círculo determinado) y la trisección del ángulo (dividir un ángulo dado en tres partes iguales). Ninguna de estas construcciones es posible con la regla y el compás, y la imposibilidad de la cuadratura del círculo no fue finalmente demostrada hasta 1882.

Los griegos, y en particular Apolonio de Perga, estudiaron la familia de curvas conocidas como cónicas y descubrieron muchas de sus propiedades fundamentales. Las cónicas son importantes en muchos campos de las ciencias físicas; por ejemplo, las órbitas de los planetas alrededor del Sol son fundamentalmente cónicas.

Arquímedes, uno de los grandes científicos griegos, hizo un considerable número de aportaciones a la geometría. Inventó formas de medir el área de ciertas figuras curvas así como la superficie y el volumen de sólidos limitados por superficies curvas, como paraboloides y cilindros. También elaboró un método para calcular una aproximación del valor de pi, la proporción entre el diámetro y la circunferencia de un círculo y estableció que este número estaba entre 3 10/70 y 3 10/71.

Geometría analítica

La geometría avanzó muy poco desde el final de la era griega hasta la edad media. El siguiente paso importante en esta ciencia lo dio el filósofo y matemático francés René Descartes, cuyo tratado "El Discurso del Método", publicado en 1637, hizo época. Este trabajo fraguó una conexión entre la geometría y el álgebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra. Éste es un fundamento de la geometría analítica, en la que las figuras se representan mediante expresiones algebraicas, sujeto subyacente en la mayor parte de la geometría moderna.

Otro desarrollo importante del siglo XVII fue la investigación de las propiedades de las figuras geométricas que no varían cuando las figuras son proyectadas de un plano a otro.

Un ejemplo sencillo de geometría proyectiva queda ilustrado en la **figura 1.**

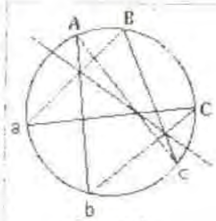


Figura 1

Si los puntos A, B, C y a, b, c se colocan en cualquier posición de una cónica, por ejemplo una circunferencia, y dichos puntos se unen A con b y c, B con c y a, y C con b y a, los tres puntos de las intersecciones de dichas líneas están en una recta.

De la misma manera, si se dibujan seis tangentes cualesquiera a una cónica, como en la figura 2, y se trazan rectas que unan dos intersecciones opuestas de las tangentes, estas líneas se cortan en un punto único.

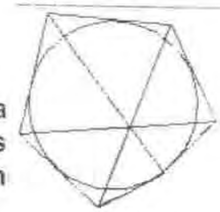


Figura 2

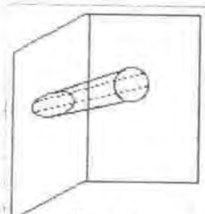


Figura 3

Este teorema se denomina proyectivo, pues es cierto para todas las cónicas, y éstas se pueden transformar de una a otra utilizando las proyecciones apropiadas, como en la figura 3, que muestra que la proyección de una circunferencia es una elipse en el otro plano.

Modernos avances

La geometría sufrió un cambio radical de dirección en el siglo XIX. Los matemáticos Carl Friedrich Gauss, Nikolái Lobachevski, y János Bolyai, trabajando por separado, desarrollaron sistemas coherentes de geometría no euclídea. Estos sistemas aparecieron a partir de los trabajos sobre el llamado "postulado paralelo" de Euclides, al proponer alternativas que generan modelos extraños y no intuitivos de espacio, aunque, eso sí, coherentes.

Casi al mismo tiempo, el matemático británico Arthur Cayley desarrolló la geometría para espacios con más de tres dimensiones. Imaginemos que una línea es un espacio unidimensional. Si cada uno de los puntos de la línea se sustituye por una línea perpendicular a ella, se crea un plano, o espacio bidimensional. De la misma manera, si cada punto del plano se sustituye por una línea perpendicular a él, se genera un espacio tridimensional.

Yendo más lejos, si cada punto del espacio tridimensional se sustituye por una línea perpendicular, tendremos un espacio tetradimensional. Aunque éste es físicamente imposible, e inimaginable, es conceptualmente sólido. El uso de conceptos con más de tres dimensiones tiene un importante número de aplicaciones en las ciencias físicas, en particular en el desarrollo de teorías de la relatividad.

También se han utilizado métodos analíticos para estudiar las figuras geométricas regulares en cuatro o más dimensiones y compararlas con figuras similares en tres o menos dimensiones. Esta geometría se conoce como geometría estructural. Un ejemplo sencillo de este enfoque de la geometría es la definición de la figura geométrica más sencilla que se puede dibujar en espacios con cero, una, dos, tres, cuatro o más dimensiones.

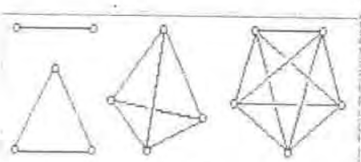


Figura 4

En los cuatro primeros casos, las figuras son los bien conocidos punto, línea, triángulo y tetraedro respectivamente. En el espacio de cuatro dimensiones, se puede demostrar que la figura más sencilla está compuesta por cinco puntos como vértices, diez segmentos como aristas, diez triángulos como caras y cinco tetraedros. El tetraedro, analizado de la misma manera, está compuesto por cuatro vértices, seis segmentos y cuatro triángulos.

Otro concepto dimensional, el de dimensiones fraccionarias, apareció en el siglo XIX. En la década de 1970 el concepto se desarrolló como

la geometría fractal.

LA TEORIA DE VAN HIELE

RECONOCIMIENTO Y ANÁLISIS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS BIDIMENSIONALES

LA TEORÍA DE VAN HIELE

Gary L. Musser y William F. Burger

El estudio de las figuras geométricas y sus propiedades es un componente esencial en el currículum de las matemáticas elementales. La geometría es rica en aplicaciones, formación de conceptos y experiencias en la solución de problemas. En este artículo estudiaremos las formas geométricas simples y sus propiedades, desde el punto de vista docente. Las investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría han dado un fuerte sustento a la teoría de van Hiele, según la cual, pasando por una secuencia de niveles de razonamiento, los estudiantes aprenden geometría.

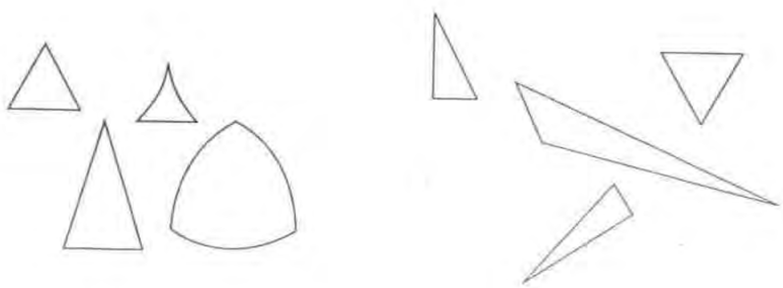
Teoría de van Hiele

En los Países Bajos, a fines de la década de los cincuentas, dos maestros de matemáticas, los esposos Pierre van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, formaron su teoría del desarrollo de la geometría, basándose en sus propias investigaciones y manera de enseñar geometría. Observaron que en el aprendizaje de la geometría los estudiantes progresaban a través de una secuencia de cinco niveles de razonamiento, desde el pensamiento holístico o totalizador (llamemos así a la percepción de la figura geométrica como una unidad, como un todo) hasta el pensamiento analítico, y de ahí a una deducción matemática abstracta y rigurosa. Los van Hiele describieron de la siguiente forma los cinco niveles de razonamiento:

Nivel 0 (Visualización)

Un niño cuyo razonamiento se encuentra en el nivel 0 reconoce la forma de ciertas figuras geométricas como un todo, sin poner atención a las partes que la componen. Por ejemplo, un rectángulo puede reconocerse porque "parece una puerta" y no porque tenga cuatro lados rectos y cuatro ángulos de 90°. En este nivel, algunos atributos relevantes de las figuras geométricas, tales como los lados rectos, pueden ser ignorados por el niño, y algunos atributos irrelevantes, como la posición de la figura respecto de los bordes de la página, pueden desconcertarlos o confundirlos. La Figura 1(a) muestra algunas figuras que fueron clasificadas como triángulos por medio del razonamiento totalizador. ¿Puede usted señalar aquellas que no estén acordes al atributo relevante? La Figura 1(b) muestra algunas figuras que *no* fueron consideradas como triángulos por los estudiantes que se encuentran en el nivel de razonamiento totalizador. ¿Puede identificar los atributos irrelevantes que deben ser ignorados?

FIGURA 1



(a) Éstos son triángulos (según ciertos niños)

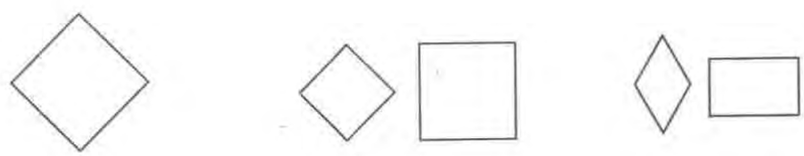
(b) Éstos no son triángulos (según ciertos niños)

78

Nivel 1 (Descripción)

En este nivel, el niño se enfoca analíticamente en las partes que componen una figura, como los lados y los ángulos. Éstas partes y sus atributos son usados para describir y caracterizar las figuras. Los atributos relevantes son entendidos y diferenciados de los atributos irrelevantes. Por ejemplo, un niño que razona analíticamente podría decir que un cuadrado tiene cuatro lados "iguales" y cuatro "esquinas cuadradas". El niño también sabe que girando un cuadrado en la página no se afecta su "cuadratura". La Figura 2 ilustra cómo algunos aspectos del concepto "cuadrado" cambian del nivel 0 al nivel 1.

FIGURA 2



(a) No es cuadrado (según algunos niños de pensamiento totalizador)

(b) Éstos son cuadrados (según los niños de pensamiento analítico)

(c) No son cuadrados (según los niños de pensamiento analítico)

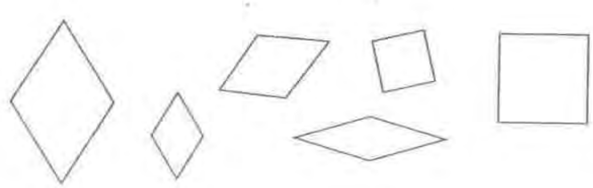
Debido a la posición de la página, algunos niños de pensamiento totalizador no consideran que la Figura 2(a) sea un cuadrado; ellos le llaman "diamante". Sin embargo, si se gira la figura de tal manera que los lados sean horizontales y verticales, entonces los mismos niños la considerarán un cuadrado. Para los niños de pensamiento analítico las figuras que aparecen en 2(b) son consideradas cuadradas, estos niños se enfocan en los atributos relevantes (cuatro lados "iguales" y cuatro "esquinas cuadradas") e ignoran los atributos irrelevantes de su posición respecto de los bordes de la página. Las figuras en 2(c) no son consideradas cuadrados por los niños que piensan analíticamente; estas figuras no tienen todos los atributos relevantes: la figura de la izquierda no tiene "esquinas cuadradas", y la de la derecha no tiene cuatro lados "iguales".

Un niño que piensa analíticamente podrá tener dificultades para entender que una figura puede pertenecer a varias clases generales y, por consiguiente, tener más de un nombre. Por ejemplo, un cuadrado es también un rectángulo, ya que un rectángulo tiene cuatro lados y cuatro "esquinas cuadradas", pero un niño que piensa analíticamente puede objetarlo, pensando que el cuadrado y el rectángulo son figuras totalmente distintas, aun cuando compartan muchos atributos.

Nivel 2 (Relaciones)

En este nivel, un niño entiende las relaciones abstractas entre clases generales de figuras y puede ordenar clases de figuras. Por ejemplo, un diamante (o rombo) es una figura de cuatro lados "iguales"; un niño que razona abstractamente en el nivel 2 se da cuenta de que un cuadrado sería tanto un rombo como un rectángulo (Figura 3), porque el cuadrado satisface todos los criterios necesarios (esto es, las definiciones dadas de este tipo de figuras).

FIGURA 3



80

Nivel 3 (Deducción)

El razonamiento en este nivel incluye el estudio de la geometría como un sistema matemático formal. Un niño que razona en el nivel 3 entiende las nociones de postulados matemáticos y teoremas, y puede escribir pruebas formales de teoremas. No usaremos los postulados formales en nuestro tratamiento de la geometría, pero usaremos la deducción informal (por ejemplo, el encadenamiento de ideas junto con el descubrimiento de las propiedades generales de las figuras).

Nivel 4 (Axiomatización)

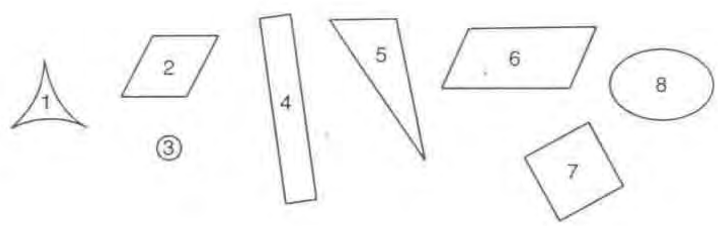
El estudio de la geometría en el nivel 4 es altamente abstracto y no necesariamente involucra modelos concretos o pictográficos. En este nivel los postulados o axiomas llegan a ser por sí mismos objeto de riguroso e intenso escrutinio. Este nivel de estudio no es conveniente para escuelas elementales, ni para la mayoría de los estudiantes del nivel medio o preparatoria, pero es usualmente el nivel de estudio en los cursos más avanzados de geometría.

Visualización de figuras geométricas - pensamiento holístico o totalizador

En la escuela primaria a los niños se les enseña a reconocer muchos tipos de figuras, como triángulos, cuadrados, rectángulos y círculos. Las preguntas sobre identificación frecuentemente se presentan en hojas de trabajo y en exámenes. Por ejemplo, a un niño se le pide "separar el triángulo, el cuadrado, el rectángulo y el círculo". A los niños se les enseña a buscar figuras prototipo, como las que han visto en sus libros de texto o en modelos físicos.

Sin embargo, muchas veces los niños sólo han visto algunos casos particulares de figuras y no tienen una idea completa de los atributos importantes que una figura debe tener para poder representar una clase en general. Con base en la teoría de van Hiele, diremos que ellos tienen una comprensión totalizadora pero no analítica de la figura. La ilustración 4 muestra una selección de figuras difíciles de identificar cuando se tiene el pensamiento totalizador. ¿Puede usted ver por qué algunos niños consideran que la figura 1 es un triángulo; la 2, un cuadrado; la 6, un rectángulo, y la 8 un círculo?

FIGURA 4

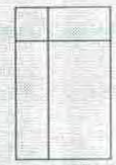


El pensamiento totalizador es un primer paso importante en el aprendizaje de las figuras geométricas. Esto permite la infraestructura para analizar las propiedades de los componentes de dichas figuras. Las habilidades para el razonamiento totalizador pueden desarrollarse en los estudiantes por medio de actividades de visualización. Por ejemplo, el encontrar figuras "ocultas" puede ayudar para que los estudiantes se enfoquen en la visualización particular de las figuras geométricas como un todo. El siguiente ejemplo proporciona una ilustración de esta idea.

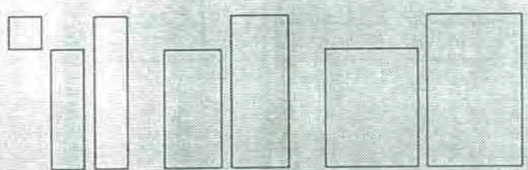
82

Ejemplo 1

¿Cuántos rectángulos diferentes pueden obtenerse de la siguiente figura?



Solución: Buscando rectángulos "verticales", encontramos siete.



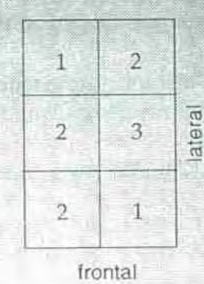
Buscando rectángulos "horizontales", encontramos dos.

Por lo tanto, en total hay nueve rectángulos.

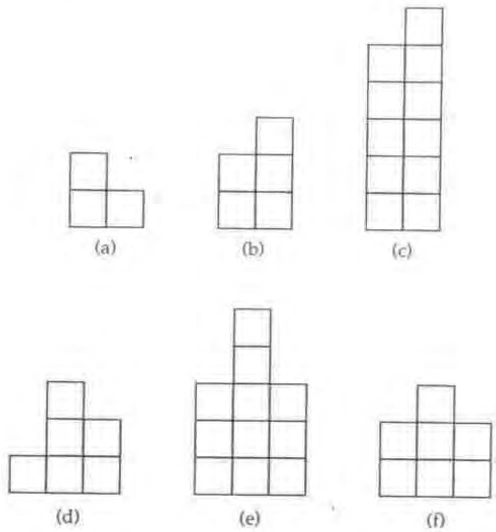
Ejemplo 2

Examinar las "vistas" de las figuras tridimensionales sencillas, es también una buena forma para que los estudiantes desarrollen destrezas en el pensamiento totalizador. El siguiente ejemplo muestra una actividad al respecto:

Ejemplo 2: En la figura de la derecha imagina que arriba de cada cuadrito se pone una pila de pequeños cubos. El número en cada cuadrito indica cuántos cubitos serán apilados ahí (la arista de cada cubito tiene la misma longitud que el lado de los cuadritos).



Identifica las vistas frontal y lateral de la pila de cubos resultante.



Solución: La vista frontal correcta es la (b), y la vista lateral correcta es la (f) (utiliza un modelo con dados u otro material, para verificarlo)

Los estudiantes que razonan primordialmente de manera totalizadora tienden a pensar en las figuras como sigue:

1. Utilizan propiedades imprecisas al comparar dibujos e identificar figuras
2. Citan prototipos visuales para caracterizar figuras
3. Incluyen atributos irrelevantes (como la posición en la página) para identificar y describir figuras
4. Excluyen algunos atributos relevantes cuando identifican y describen figuras

5. Les cuesta trabajo concebir una infinita variedad de figuras

6. Cuando agrupan las figuras para su clasificación, a partir de algún atributo, los grupos resultantes pueden ser inconsistentes

Descripción de figuras - pensamiento analítico

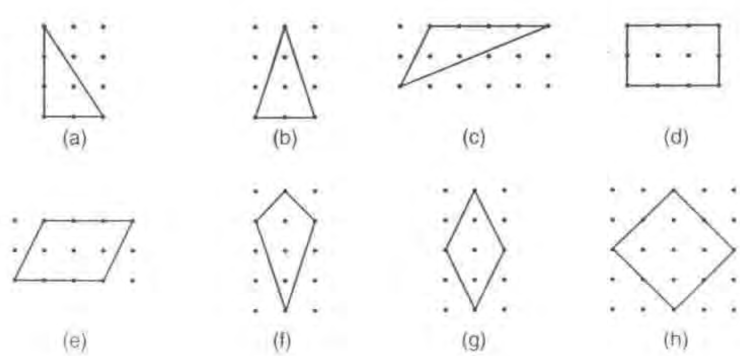
Uso del papel cuadriculado o del geoplano

Los puntos que forman una cuadrícula reticular (geoplano) sirven como un medio efectivo para analizar figuras geométricas. Un geoplano o papel cuadriculado provee representaciones concretas para tales investigaciones. Al unir dos puntos por el camino más corto posible se forma un segmento de recta. La Figura 5 muestra, en una cuadrícula reticular, algunas figuras cuyos lados son **segmentos de recta**. Las figuras (a), (b) y (c) son **triángulos** porque son figuras cerradas compuestas de exactamente tres segmentos, llamados **lados**. Las otras figuras son **cuadriláteros** porque son figuras cerradas compuestas de cuatro segmentos de recta (lados). Los triángulos tienen tres ángulos (un **ángulo** es la unión de dos segmentos con un extremo común llamado **vértice**). Los cuadriláteros tienen cuatro ángulos.

Si consideramos los triángulos de la Figura 5 notaremos muchas diferencias entre ellos. Por ejemplo, el triángulo (a) tiene un ángulo formado por un lado horizontal y otro vertical; cualquier ángulo idéntico al ángulo formado por líneas horizontales y verticales es llamado **ángulo recto**. En las figuras (d) y (h), los cuadriláteros tienen cuatro ángulos rectos. El triángulo (b) tiene dos lados de la misma longitud. Un triángulo con dos o tres lados de la misma longitud es llamado **isósceles.** Un triángulo con tres lados de la misma longitud se llama **equilátero.** El triángulo (c) tiene tres lados de diferentes longitudes; tales triángulos se llaman **escalenos.** Así, podemos comparar y nombrar tipos de triángulos de acuerdo con sus lados y ángulos.

La Figura 5 contiene una variedad de cuadriláteros. Por ejemplo, el que está en (h) es un **cuadrado**; un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados de la misma longitud y cuatro ángulos rectos. El que está en (d) es un rectángulo; un **rectángulo** es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos. El que está en (e) es un **paralelogramo**; un paralelogramo es un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos (que tienen la misma dirección). El que está en (f) es un romboide simétrico; un **romboide** es un cuadrilátero con dos pares de lados contiguos de diferente longitud. Finalmente, la figura (g) es un **rombo**; un rombo es un cuadrilátero con cuatro lados de la misma longitud y dos ángulos mayores que los otros dos. Podemos saber que los lados tienen la misma longitud observando que al ir de una esquina a la otra siempre contamos el mismo número de espacios hacia arriba,

FIGURA 5



86

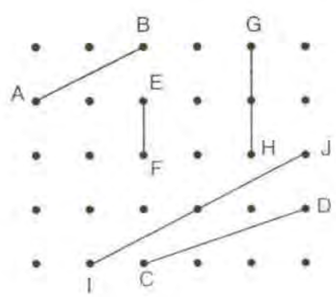
hacia abajo, hacia la izquierda, o la derecha. También es cierto que las figuras (h) y (g) tienen cuatro lados de la misma longitud y ángulos opuestos iguales.

Notamos que el rectángulo (d), el rombo (g) y el cuadrado (h) también tienen dos pares de lados paralelos; por tanto, éstos también son paralelogramos. Los estudiantes que razonan analíticamente, algunas veces tienen dificultad en entender que una figura puede corresponder a varios tipos simultáneamente. Una analogía con los criterios para ser miembro de un club puede ayudar a explicar esto; por ejemplo, la figura (h) tiene cualidades para ser miembro de, al menos, tres "clubes": los rectángulos, los paralelogramos y los cuadrados.

A medida que se avanza en el estudio de la geometría, el uso del papel cuadriculado y del geoplano podrán servir para introducir la noción de pendiente y los criterios para investigar si dos segmentos son paralelos.

Ejemplo 3

¿Cuáles de los siguientes segmentos de recta son paralelos?



SOLUCIÓN: Los segmentos EF y GH no tienen pendientes, por tanto son paralelos. Para los otros segmentos, calculemos sus pendientes

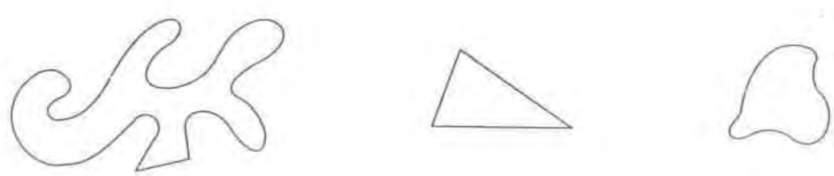
Segmento de recta	Pendiente
$\overline{AB}$	$\frac{1}{2}$
$\overline{CD}$	$\frac{1}{3}$
$\overline{IJ}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Así, el segmento de recta $\overline{AB}$ es paralelo al $\overline{IJ}$, pero ni $\overline{AB}$ ni $\overline{IJ}$ son paralelos a $\overline{CD}$.

Polígonos regulares y simetría

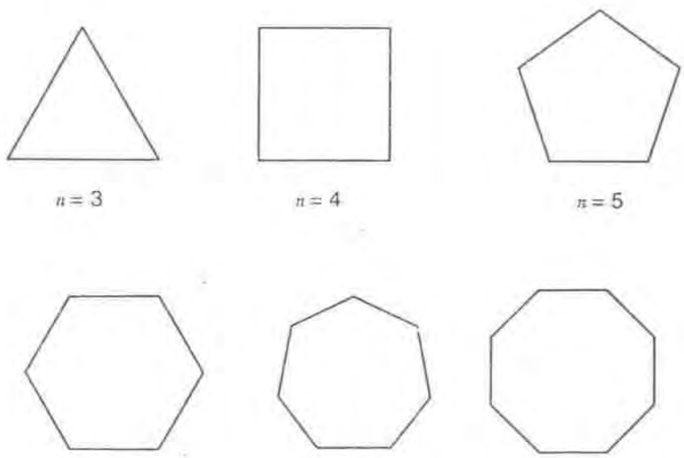
Una curva en el plano que no se cruza a sí misma y encierra parte del plano es llamada **curva cerrada simple** (Figura 6).

FIGURA 6



Note que una "curva" cerrada simple puede contener segmentos de recta. Un tipo especial de curva cerrada simple que incluye completamente segmentos de recta, en los cuales todos los lados son de la misma longitud y todos los ángulos son idénticos, es llamada un **polígono regular**. La Figura 7 muestra algunos ejemplos de polígonos regulares; como el número de lados del polígono puede ser cualquier número mayor que 2, vemos que hay un número infinito de polígonos regulares de clases diferentes.

FIGURA 7



$n = 3$ $n = 4$ $n = 5$

$n = 6$ $n = 7$ $n = 8$

Los polígonos regulares que aparecen en la ilustración 7 son ejemplos de figuras **convexas**, ya que cada una tiene la siguiente propiedad: un segmento de recta que une dos puntos interiores de la figura se encuentra completamente dentro de la figura. La ilustración 8 muestra algunas figuras convexas y no convexas.

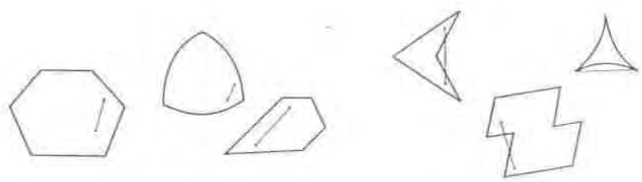
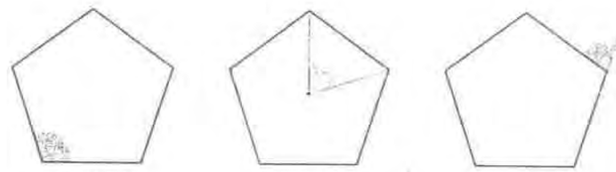


FIGURA 8

Hay varios ángulos de interés en los polígonos regulares. La Figura 9 muestra tres de ellos: ángulos en el vértice, ángulos centrales y ángulos exteriores.

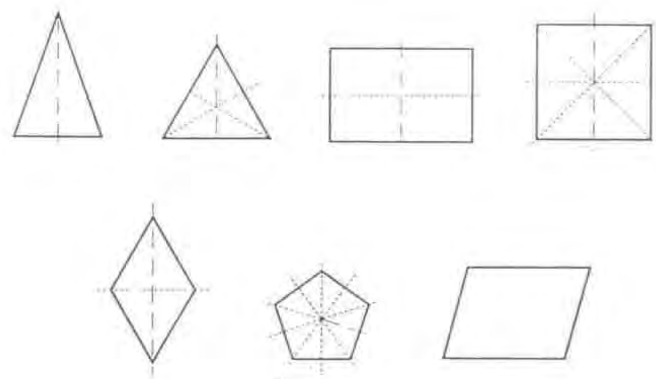
FIGURA 9



Un **ángulo en el vértice** está formado por dos lados consecutivos. Un **ángulo central** está formado por dos segmentos que conectan el centro de la figura y dos vértices. Un **ángulo exterior** está formado por un lado y la prolongación del lado adyacente, como se muestra en la Figura 9. Los ángulos en el vértice y los ángulos exteriores se forman en todos los polígonos convexos.

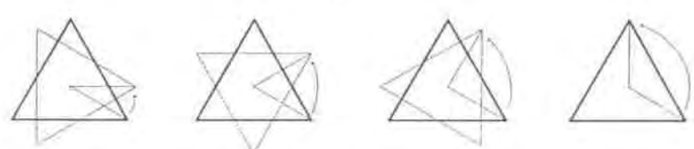
Las figuras bidimensionales pueden tener dos tipos distintos de simetría: de reflexión y de rotación. Una figura tiene **simetría de reflexión** si hay una línea por medio de la cual la figura se pueda "doblar", de tal manera que una de las mitades coincida perfectamente con la otra. La Figura 10 muestra varias figuras y sus propiedades de simetría de reflexión. Las líneas de simetría están punteadas. Note que el triángulo equilátero, el cuadrado y el pentágono regular tienen tantas líneas de simetría como lados. En general, un polígono regular de n lados tiene n líneas o ejes de simetría.

FIGURA 10



El segundo tipo de simetría es el de rotación. Una figura tiene **simetría de rotación** si hay un punto alrededor del cual la figura puede girar menos que una vuelta completa, de tal manera que la imagen coincida perfectamente con la figura original. La Figura 11 muestra una investigación de simetría de rotación para un triángulo equilátero.

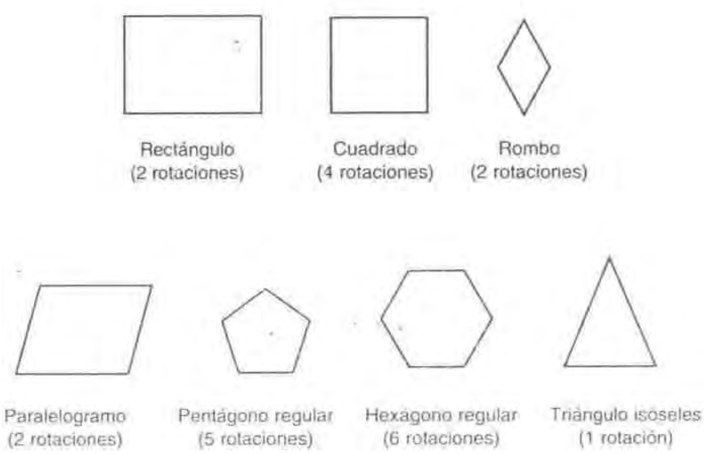
FIGURA 11



En la Figura, el triángulo equilátero coincidió al ser rotado 1/3 de vuelta en dirección contraria a las manecillas del reloj; esto ocurrirá también si lo rotamos 2/3 de vuelta y, por supuesto, una vuelta entera. Toda figura puede ser rotada una vuelta entera tomando cualquier punto como centro de rotación, para producir una imagen que coincida trivialmente con la figura original. Las figuras en las que solamente una vuelta completa puede producir una imagen idéntica, se dice que no tienen simetría de rotación.

La Figura 12 muestra varios tipos de figuras y el número de rotaciones, incluida una vuelta completa, que hacen que la imagen coincida con la figura (vea si puede verificar el número dado). Note que para cada polígono regular de n lados hay n rotaciones, esencialmente distintas, que producen imágenes que coinciden exactamente con el polígono regular.

FIGURA 12



92

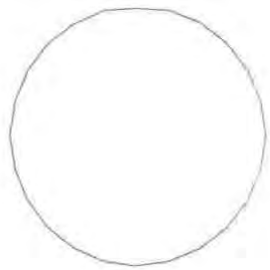
En las Figuras 10 y 12 vemos que las figuras pueden tener simetría de reflexión sin simetría de rotación (por ejemplo, un triángulo isósceles que no sea equilátero), y simetría de rotación sin simetría de reflexión (por ejemplo, un paralelogramo que no sea rectángulo). Podemos tabular varios atributos de las figuras, como la simetría y, de este modo, comparar tipos generales de figuras. La tabla 1 muestra una lista de atributos para algunos cuadriláteros.

Tabla 1
Atributos / Figuras

Atributo	Paralelogramo	Rombo	Rectángulo	Cuadrado	Romboide simétrico
Ambos pares de lados opuestos tienen la misma longitud	X	X	X	X	
Ambos pares de lados opuestos son paralelos	X	X	X	X	
Los lados adyacentes forman ángulos rectos			X	X	
Al cruzarse las diagonales forman ángulos rectos		X		X	X
Tienen simetría de reflexión		X	X	X	X
Tienen simetría de rotación	X	X	X	X	

Si consideramos polígonos regulares en los cuales el número de lados n es muy grande, podemos obtener figuras con muchos vértices, de los cuales todos distan lo mismo del centro (equidistan del centro). La figura 13 muestra, a modo de ejemplo, un polígono regular de 24 lados. Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo (llamado **centro**).

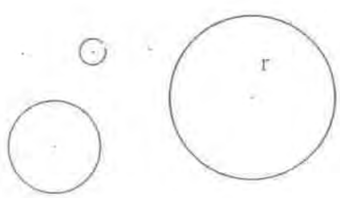
FIGURA 13



La distancia del centro a un punto de la circunferencia es llamada **radio** de la circunferencia. Cualquier segmento de recta cuyos extremos sean el centro y un punto de la circunferencia es un radio. La longitud del segmento de recta que pasa por el centro del círculo y cuyos extremos se encuentren en la circunferencia es llamado **diámetro** del círculo. La Figura 14 muestra algunos círculos y sus centros.

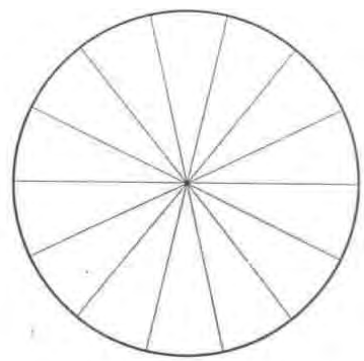
Cuando una computadora dibuja un círculo, lo que realmente dibuja es un polígono regular de muchos lados que produce la ilusión óptica de ser un círculo

FIGURA 14



Si, de acuerdo con las propiedades de simetría, analizamos un círculo, encontraremos que tiene una infinidad de líneas de simetría. Cada línea que cruza el centro del círculo es un eje de simetría (Figura 15). Además, un círculo también tiene infinidad de simetrías de rotación, ya que cada ángulo cuyo vértice sea el centro del círculo es un ángulo de rotación.

FIGURA 15



Así, muchas propiedades del círculo, incluida su área, se obtienen comparando el círculo con polígonos regulares de más y más lados.

Este artículo es una adaptación de la introducción al capítulo 12, "Geometric Shapes", del libro de Gary L. Musser y William F. Burger. *Mathematics for Elementary Teachers*. MacMillan, USA, 1988.

BIBLIOGRAFÍA

El libro está adaptado para profesores de matemáticas de educación básica; para mayor profundización al respecto consúltese:

TREFFERS, A. (1987). *Three dimensions.* Holanda, D. Reidel. Dordrecht.

VAN HIELE, P. PM. (1957). *El problema de la comprensión* (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría). (Traducción de trabajo al español realizada para el proyecto de investigación. "Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Media basada en el Modelo de Razonamiento de van Hiele" (1991).

VAN HIELE-GELDOF. (1957). *The didactics of geometry en the lowest class of secondary school* (tesis doctoral). Holanda, J.B. Wolters: Groningen, (traducción al inglés en Fuys, Geddes, Tischler, 1984).

GEOMETRIA DESDE UN PUNTO DE VISTA COGNITIVO

RAYMOND DUVAL

La Geometría desde un Punto de Vista Cognitivo

Raymond Duval

Traducción: Hernández, Víctor y Villalba, Martha

PMME-UNISON. Febrero. 2001.

La geometría puede ser emocionante para los matemáticos y para cualquiera que guste de las matemáticas. Pero, ¿qué hay sobre la demás gente que debe aprender matemáticas en sus currículo? Esta pregunta surge cuando nos fijamos en las numerosas y profundas dificultades que encuentra el profesor. La enseñanza de la geometría es más compleja y con frecuencia menos exitosa que la enseñanza de las operaciones numéricas o álgebra elemental. De donde, ¿porqué enseñar geometría a todos los alumnos? Esta pregunta da por sentada otra más: ¿cómo debiera enseñarse la geometría? Con el fin de adelantar algunas ideas sobre este aspecto crucial debemos tomar en cuenta la complejidad cognitiva subyacente de la actividad geométrica.

La geometría involucra tres clases de procesos cognitivos que cumplen con funciones epistemológicas especificas:

Procesos de **visualización** con referencia a las *representaciones espaciales* para la ilustración de proposiciones, para la exploración heurística de una situación compleja, para echar un vistazo sinóptico sobre ella, o para una verificación subjetiva;

Procesos de **construcción** mediante herramientas: la construcción de configuraciones puede servir como un *modelo* en el que la acción sobre los representantes y los resultados observados están relacionados con los objetos matemáticos que éstos representan.

El **razonamiento** en su relación con los *procesos discursivos* para la extensión del conocimiento, para la demostración, para la explicación.

Estos procesos diferentes pueden ser realizados separadamente. Así, la visualización no depende de la construcción: hay acceso a las figuras, de cualquier manera que hayan sido construidas. Y aún si la construcción guía a la visualización, los procesos de construcción dependen sólo de las conexiones entre propiedades matemáticas y las restricciones técnicas de las herramientas usadas. En última instancia, si la visualización es un recurso intuitivo que algunas veces es necesario para encontrar una demostración, el razonamiento depende exclusivamente del corpus de proposiciones (definiciones, axiomas, teoremas) de los que se dispone. Y, en algunos casos la visualización puede ser engañosa o imposible.

Sin embargo, estas tres clases de procesos cognitivos están cercanamente conectados y su sinergia es cognitivamente necesaria para la competencia en geometría.

Figura 1

Las interacciones cognitivas subyacentesinvolucradas en la actividad geométrica

En la Figura 1 cada flecha representa la forma en la que una clase de proceso cognitivo puede apoyar a otra clase en cualquier tarea. La flecha 2 está punteada porque la

98

visualización no siempre ayuda al razonamiento. La flecha 5(B) enfatiza que el razonamiento B puede desarrollarse de una manera independiente. En muchos casos podemos tener un circuito más largo. Por ejemplo 2-5(B)-3 puede representar la forma de encontrar el orden de construcción para una figura dada; 4-2-5(A) o 5(B) puede representar formas de describir un orden de construcción.

Por tanto podemos ver el problema básico de la enseñanza de la geometría en escuelas anteriores y posteriores a las escuelas de nivel medio, como sigue: ¿cómo conseguir que los alumnos vean la comunicación entre estas tres clases de procesos? Las dificultades provocadas por la demostración son bien conocidas, y parece más natural favorecer primero los procesos de construcción y visualización. Pero esto provoca la siguiente pregunta general: ¿la práctica en cualquiera de las clases de procesos trae consigo el desarrollo para las otras dos clases?

Nuestra investigación nos ha permitido anteponer el siguiente marco de análisis:

1. Las tres clases de procesos deben ser desarrollados separadamente.
2. El trabajo en la diferenciación entre diferentes procesos de visualización y entre diferentes procesos de razonamiento es necesaria en el currículo, pues existen varias formas de ver una figura; de la misma manera hay varias formas de razonar.
3. La coordinación de estas tres clases de procesos puede ocurrir realmente sólo después de este trabajo de diferenciación.

1. Tópicos básicos en geometría desde un punto de vista cognitivo: Visión y razonamiento

Visión: ¿Es suficiente observar las imágenes y figuras para ver lo que ellas representan?

Lo que una figura deja ver es una o varias gestalt 1D/2D o 2D/2D (líneas rectas o curvas, el contorno cerrado de un triángulo, de un cuadrilátero, etc.) o gestalts 3D/2D (cubo, tazón, etc.). La identificación visual de estas gestalts depende de las leyes de la organización perceptiva, y todas estas gestalts pueden ser usadas para representar objetos reales u objetos matemáticos. Pero, con el fin de representar un objeto matemático, una figura debe llenar los siguientes dos requerimientos específicos:

Ser una configuración, esto es ser una conjunción o una fuente de varias gestalts constituyentes con relaciones entre ellas que caractericen la configuración (condición visual)

Estar anclada a una proposición que fije algunas propiedades representadas por la gestalt (hipótesis). Esta ancla discursiva proporciona la puerta de entrada matemática en la configuración (condición de prueba). Entonces, resulta obvia una primera distinción entre dos aprehensiones de una figura:

APREHENSIÓNPERCEPTUAL

APREHENSIÓN DISCURSIVA de una figura:

Asociación de gestalts y proposiciones que determinan el objeto repres
(*cambio de anclaje*)

I. Visual

II a. Visual Discursiva

II b. Discursiva Visual

La identificación de una **gestalt** 2D/2D. Puede ser vista como un techo, como la parte superior de una mesa, como un cuadrado en un plano distinto del frontal, como un paralelogramo, etc. Las Gestalts son más fácilmente vistas como representaciones geométricas *cuando están siendo construidas con herramientas* (regla y compás, primitivas de algún software geométrico)	*A* *B* *D* *C* "ABCD es un paralelogramo" En el contexto de una proposición geométrica, esta **gestalt** 2D/2D de *varias gestalt constituyentes* **1D/2D** (aquí las líneas como lados de un ...). La representación geométrica está dada a través de las relaciones entre las gestalt constituyentes. Esta es la razón del porqué las gestalt 2D son vistas más fácilmente como configuraciones en relación a su construcción. . La aprehensión discursiva geométrica involucra ***un cambio dimensional** en la aprenhensión perceptual* de las gestalt **2D/2D**.	*A* *B* *D* *C* *A* *B* *D* *C* "Sea *ABCD* un paralelogramo ... " Varias configuraciones posible: objeto matemático "paralelogr relaciones entre segment propiedades del objeto represe enfatizadas con marcas.

Figura 2

Diferentes accesos en una figura

Uno ve la diferencia significativa entre I por un lado, y II a - II b por el otro, los cuales son generalmente confundidos. En I es visto sólo una gestalt que puede mostrar cualquier objeto: techo, rectángulo desde una perspectiva particular, ... en II la misma gestalt debe ser vista como una configuración de varias gestalt constituyentes, cada una representando por ella misma un segmento o un punto porque la gestalt percibida se presenta como un paralelogramo. En consecuencia la visualización en II es totalmente diferente de I. En II la visualización requiere un movimiento interno entre la configuración predominante de la gestalt 2D y las gestalts constituyentes 1D/2D que emergen en una totalidad. Este movimiento interno implica un **cambio dimensional** en la organización perceptiva de la forma de ver. Este cambio dimensional interno no debe ser confundido con el **cambiode anclaje** implicado por los dos tránsitos II a y II b, los cuales no son equivalentes.

El cambio dimensional interno y el cambio de anclaje son las características del modo matemático de mirar a una gestalt o a una configuración.

Cómo trabaja la visión en la solución de problemas: la aprehensión operativa

En una figura geométrica existen más gestalts constituyentes y más subconfiguraciones posibles que aquellas que fueron explícitamente movilizadas para su construcción o las que son explícitamente nombradas en la hipótesis (Duval [5] p. 182). Es este excedente lo que crea el poder heurístico de las figuras: algunas subconfiguraciones (o algunas gestalts consituyentes) dan las ideas clave para una solución o para una explicación. Desde el punto de vista cognitivo surge la pregunta sobre la visibilidad de estas subconfiguraciones relevantes: ¿cómo pueden ser distinguidas?

Para entender este proceso cognitivo, podemos comparar tres problemas elementales.

Problema 1. *Toma un paralelogramo ABCD. I y J son los puntos medios de CD y AB. Demuestre que los segmentos DP, PQ y QB son de la misma longitud.*

En esta figura inicial pueden ser vistas muchas subconfiguraciones. Pero las siguientes deben ser distinguidas y seleccionadas para la solución.

Figura 3

Subconfiguraciones relevantes para el Problema 1

El poner la atención sobre las subconfiguraciones relevantes *B* y *C* requiere que uno haya pensado explícitamente en un teorema, el teorema de los medios. Hemos observado estudiantes de 13-14 años que no pueden verlas en la figura inicial (incluso después de una discusión para explicar porqué $DP = PQ$ y $PQ = QB$). Aquí, estamos en una aprehensión discursiva con anclaje en las proposiciones (visual discursiva): la distinción de subconfiguraciones es traída al punto por definiciones y teoremas aplicables. La figura juega sólo el rol de un recurso intuitivo para la aplicación de las proposiciones

La situación es totalmente distinta en el Problema 2 donde no es necesario un conocimiento explicito (definición, teorema, ...) para ver la figura y para encontrar las subconfiguraciones relevantes: podemos explorar completamente la situación tanto en una aprehensión visual como en una aprehensión visual discursiva:

Problema 2. *En la siguiente figura, AC es la diagonal del rectángulo ABCD. Compare las áreas de los dos rectángulos grises, cuando el punto U se mueve sobre la diagonal.*

En esta figura inicial pueden ser vistas muchas subconfiguraciones y gestalts constituyentes 1D/2D (o 0D/2D). Pero para la solución, deben ser distinguidas las siguientes.

Figura 4

Subconfiguraciones relevantes para el Problema 2

Las subconfiguraciones *A* y *A´* son identificadas rápidamente y permanecen invariantes cuando el punto *U* se mueve sobre las diagonales. Las subconfiguraciones *B* y *B´* están incluidas respectivamente en *A* y *A´* y perceptualmente sobrepuestas, sin importar la posición del punto *U* sobre la diagonal. No es necesaria la referencia a conocimiento geométrico explícito para ver esto en la figura inicial. Aquí la visión puede ser el único proceso guía en la resolución del problema. La principal dificultad concierne a la identificación de las subconfiguraciones *B* y *B´* (Mesquita [8]). Hemos observado que existen varios factores que disparan o inhiben la distinción o la visibilidad de una subconfiguración en una figura inicial. La complementariedad (si o no) de las gestalts constituyentes para las subconfiguraciones y la convexidad (si o no) de las subconfiguraciones están entre estos factores (Padilla [10]). Aquí las subconfiguraciones *B* y *B´* están compuestas por dos gestalts no complementarias y no son convexas. También parecen estar enmascaradas por otras subconfiguraciones que son visualmente predominantes. De lo que se sigue la gran dificultad de los alumnos de 12-13 años y aún mayores para encontrarlas. Sin embargo, en estos dos problemas no se requiere un **cambio figural** real, nada de la figura inicial debe ser adicionado o transformado: todas las subconfiguraciones relevantes ya están dadas con la figura inicial. Este no es el caso en la siguiente situación, una prueba bien conocida del teorema de Pitágoras.

Pruebe que en un triángulo rectángulo .

Figura 5

Una antigua y clásica prueba

El triángulo rectángulo debe ser incluido primero en un una configuración más grande, un cuadrado externo de lado con un cuadrado interno de lado igual al tercer lado del triángulo rectángulo. Este es un cambio figural real. Después, esta configuración mayor debe ser reconfigurada cambiando algunas gestalts constituyentes, de tal manera que el cuadrado interno aparezca dividido en dos cuadrados más pequeños de áreas y . El primer cambio figural implica, como en el Problema 1, un anclaje discursivo. Este anclaje es realizado por las propiedades establecidas en la relación . El segundo cambio figural depende únicamente de las posibilidades de reorganización de las gestalts constituyentes. Aquí la gestalts constituyentes de la configuración incluida se cambian como piezas de un rompecabezas con el fin de obtener otra configuración que sea relevante para la solución. En el contexto de un problema dado, una o varias reorganizaciones particulares son relevantes mientras que otras no lo son. Podemos llamar a este cambio figural la **aprehensión operativa** (Duval [1][4]). El más importante e interesante punto en todo esto, es que la aprehensión operativa puede ser más o menos visible y que de su visibilidad dependen tanto el disparo y la inhibición de factores como la distinción previa de subconfiguraciones. Es este cambio figural o aprehensión operativa de una figura, lo que brinda a la visión su poder heurístico en la solución de problemas.

Estos tres ejemplos como cualquier ejemplo son evidentemente muy simples y limitados a algún campo particular del conocimiento geométrico. Y uno puede fácilmente imaginar la creciente complejidad de visualización mediante figuras que representen situaciones geométricas más ricas. Pero lo que debemos señalar a través de estos ejemplos, concierne al fenómeno general acerca de la visualización en geometría. Consecuentemente la visualización en geometría implica necesariamente al menos uno de los tres cambios acerca de lo que se ve: cambio dimensional, cambio figural, cambio de anclaje.

El cambio dimensional es el más obvio. Al menos en la geometría del espacio donde uno necesita primero distinguir las diferentes secciones planas posibles de un sólido, por ejemplo, con el fin de seleccionar el más relevante. De hecho, de la identificación de un plano en una representación 3D/2D emerge un problema muy importante que concierne también a los primeros pasos en la representación geométrica del espacio (Rommevaux, [13]). Y el cambio desde una percepción sensorio motriz de un objeto 3D a su representación 3D/2D nunca es evidente ni inmediata: hay un largo caminoque va a través de las representaciones del plano. Aquí debemos explicar solamente el cambio dimensional implicado en la geometría plana: ¡una gestalt 2D debe ser vista como una configuración de una gestalt 1D o 0D! . En la geometría plana, como en la geometría del espacio, el cambio dimensional es un proceso cognitivo básico de la forma como uno ve una representación figural. Y podemos llevar más adelante la tesis de que la visualización en geometría cumple cabalmente un rol heurístico cuando los objetos o propiedades matemáticas que son relevantes para una demostración pueden ser vistas en una configuración de una dimensión mayor que la dimensión de las gestalts o subconfiguraciones que representan esos objetos en la figura inicial. Y con el fin de ilustrar este punto, tenemos aquí el siguiente problema de geometría plana [Mesquita, [9] p. 135]):

Construir un cuadrado inscrito en un triángulo

Figura 6

En este problema encontrar la desviación a través de la configuración plana homotética es más natural cuando uno puede ver a mayor profundidad (Lémonidis [7]). El cambio dimensional es como un movimiento interno y escondido hacia arriba y hacia abajo en el número de dimensiones para la aprehensión visual de una configuración.

El cambio figural, o aprehensión operativa, es el más complejo y puede ser el menos consciente. Se debe distinguir de la aprehensión perceptual con la cual se conecta, y de la aprehensión discursiva (la cual está anclada en las hipótesis y en el conocimiento de definiciones, teoremas, ...) de la cual está completamente separada. Esto concierne a un proceso figural específico. Hasta ahora hemos identificado tres grandes clases de cambios figurales, con algunas operaciones para cada uno de ellos, y para cada operación algunos factores que disparan o inhiben su visibilidad (Duval, [4] p. 148). Esto le da significado a analizar la contribución heurística de una figura inicial para un problema específico y para esperar las dificultades y los obstáculos que ésta pueda generar (Duval [4], 149-154; Padilla [11]). El cambio figural es como una acción que transforma la organización visual de una configuración.

El cambio de anclaje en la aprehensión discursiva es la más familiar. Vemos y hablamos (en voz alta o mentalmente) acerca de lo que estamos observando. Consecuentemente la distinción visual hace surgir palabras al menos implícitamente, y las palabras mentalmente pronunciadas pueden cambiar el foco de atención hacia algunos no advertidos en la figura. Este cambio de anclaje con frecuencia se da sin ser notado. ¡Ay de los que enseñan geometría! Porque un alumno no tiene el mismo *discurso interior* acerca de las gestalts y configuraciones identificadas perceptivamente como el que tiene un matemático. Y hay relaciones entre el discurso interno y el razonamiento. Observar un figura puede ser suficiente para entender una situación geométrica o para estar convencido *solamente cuando todos estos cambios pueden ser realizados e integrados*. Pero,¿hay una forma natural y común de observar cualquier representación figural, no importa que haya sido producida material o mentalmente? ¿Puedo (alumno) ver lo que tu (profesor) ves sin que me lo tengas que explicar y sin que yo te tenga que señalar lo que pude haber visto? Este es el asunto ...

¿Qué es el razonamiento en geometría?

La palabra "razonamiento" es usada en un rango muy amplio de significados. Cualquier movimiento, cualquier ensayo y error, cualquier procedimiento para solucionar una dificultad, con frecuencia es considerado como una forma de razonamiento. Más específicamente, cualquier procedimiento que nos permite desprender nueva información de informaciones dadas es considerada como "razonamiento". De esta manera, la inducción, la abducción, la inferencia son varias formas de razonamiento.

Desde un punto de vista cognitivo hay diferentes clases de procesos que dependen de la *forma* en la cual la información es presentada y también de la manera en que la información puede ser *organizada* (Duval, [5]).

En geometría la información disponible se da bajo una organización visual de gestalts *n*D/2D y bajo algunas redes semánticas desde las cuales no solamente pueden ser nombradas las gestalts y los objetos, sino también desde las pueden ser generadas preguntas, hipótesis, conjeturas acerca de las gestalts, los objetos y sus relaciones. Y esta información dada debe ser procesada en un nivel representacional y simbólico, aún si algunos modelos pueden ser físicamente construidos. De aquí que nuestro cuestionamiento se transforma: ¿qué son los procesos cognitivos en geometría involucrados en la solución de problemas y en las demostraciones?. Debemos distinguir tres procesos cognitivos:

1. **Un proceso puramente configural**, descrito arriba como una aprehensión operativa;
2. **un proceso discursivo natural** que es espontáneamente realizado en la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación, argumentación;
3. **un proceso discursivo teórico** que es realizado a través de la deducción. La experiencia de la necesidad lógica está cercanamente conectada a este proceso teórico. Puede ser realizada en un registro puramente simbólico o en el registro de la lengua natural. Pero estos dos registros no proveen ni la misma dificultad ni el mismo significado para los alumnos.

Ya hemos enfatizado el hecho de que una aprehensión operativa es completamente independiente de cualquier proceso discursivo. Esta es la razón de que la visualización sea un proceso irreducible para la investigación en geometría. Pero la visualización puede ser encajada en

104

un proceso discursivo natural (Figura 1, flecha 5 (A)): lo que algunas veces es designado como "razonamiento figural" es más bien una clase de descripción espontánea de un proceso puramente configural. Por el contrario, un proceso puramente configural no puede ser encajado en un discurso teórico aún cuando algunas veces proporciona las ideas claves para una demostración. Y, lo que es más importante, hay una brecha entre el proceso discursivo natural y el proceso discursivo teórico (Duval [3], [5]). Uno de los principales problemas de la enseñanza de la geometría es la inhabilidad para hacer que la mayoría de los alumnos logren saltar esta brecha. Y algunas veces los profesores no tienen una clara advertencia de la diferencia significativa de trabajar entre el proceso discursivo natural y el proceso discursivo teórico. Nos enfocaremos ahora brevemente en estos dos procesos.

El razonamiento como un proceso discursivo natural en el que se encaja un proceso puramente configural

Con el fin de simplificar la presentación regresemos al Problema 2. Un proceso puramente configural nos permite distinguir todas las posibles configuraciones, aún las menos directamente visibles, y nos permite reconocer las que son relevantes en el contexto del problema (Figura 4). Pero esto no es suficiente para resolver el problema. Se necesitan operaciones de otra naturaleza. Éstas se muestran el la siguiente secuencia donde las operaciones discursivas básicas están marcadas con negritas.

Figura 7

Podemos observar dos niveles de organización:

- un nivel global en tres pasos I, II y III que se ven como tres proposiciones.
- un nivel local interno a cada paso: subconfiguraciones que se ven como palabras y el conector "**y**", así como los símbolos verbales abreviados ("=" significa "produce" y "-" significa "quitar de") son necesarios con el fin de organizar un paso. Debemos recalcar que la igualdad entre dos subconfiguraciones similares puede resultar de un traslape visual.

Podemos hacer la presentación lingüistica de esta secuencia más explícita, simplemente describiéndola.Esto es lo que los alumnos de 12-13 años hacen con más o menos precisión a través de su argumentación oral o escrita (Mesquita [9]). Evidentemente son posibles otras secuencias para este problema y pueden ser expresadas mediante otros argumentos. Pero nos hemos referido a la misma forma de razonamiento. Aquí la visualización y la verbalización espontánea están muy cerca una de la otra. Éste no es el caso con los procesos de discurso teórico.

El razonamiento como un discurso teórico con un proceso deductivo

En geometría, razonar con el fin de demostrar requiere dos condiciones críticas:

1. Usar *proposiciones*, cada una con un *estatus teórico específico* anterior: axioma, definición, teorema, hipótesis, conjetura, etc.

2.usar *solamente* teoremas, axiomas o definiciones para dar un paso hacia la conclusión.

En otras palabras, aquí la forma en que la información está dada es diferente: pueden ser solamente proposiciones. Y la organización es totalmente diferente. Tenemos tres niveles de organización:

Un nivel global en el que los pasos son ligados de acuerdo a su conclusión;

Un nivel localen el que al menos las tres proposiciones son organizadas de acuerdo a su estatus (hipótesis o conclusión previa, definición o teorema, conclusión local);

Un micro-nivel interno a las proposiciones usadas como reglas (definiciones, teoremas, ...) en las que uno debe distinguir dos partes, la parte de condiciones a verificar y la que es una conclusión a establecer.

No hay nada en común entre las organizaciones de un nivel local en un proceso discursivo natural y en un proceso discursivo teórico. Primero, porque las proposiciones están ligadasde acuerdo a sus estatus. Segundo, porque esta organización trabaja por sustitución de proposiciones como en un cálculo y no por asociación u oposición como en el discurso natural (Duval [3]).

Eso no es una forma natural de razonamiento. Está muy lejos de aquel usado en una discusión, o en la vida diaria. Ligar proposiciones de acuerdo a sus estatus va muy frecuentemente en contra de las asociaciones espontáneas o evidentes. Y los axiomas, teoremas o definiciones no son argumentos para sostener una tesis o una opinión: el usar un teorema requiere primero operaciones de verificación y solo en tanto cuanto el teorema incluye condiciones. Muchos alumnos no pueden distinguir este proceso deductivo teórico del proceso discursivo más natural, incluso cuando su mención de definiciones o teoremas sea en una forma aparentemente correcta. A ellos les parece que es una demanda inútil y artificial de sus profesores. Pero aquellos que descubren el proceso deductivo, especialmente a niveles local y micro de organización de las proposiciones, tienen la experiencia personal de la necesidad lógica de la conclusión y del poder de esta forma de razonamiento. Ellos perciben la naturaleza y la fortaleza de su cambio de convicción (Duval [2], [5], p. 224-231).

Y ahora volvamos a nuestras dos preguntas sobre visualización y razonamiento en geometría

En geometría, la visualización cubre tanto la aprehensión perceptiva, discursiva y operativa de una figura como una representación del espacio. Y porque no requiere conocimiento matemático, la visualización juega un rol heurístico básico y a través de la aprehensión operativa, puede proporcionar algo parecido a la evidencia convincente. ¿Cuáles son estas relaciones con las diferentes clases de razonamiento? A fin de dar una presentación corta, podemos empezar desde los dos comportamientos típicos siguientes:

2 Aprehensión perceptiva de una configuración gestálticaO

1 ¿cambio dimensional

cambio de anclaje?

Una aprehensión discursiva entre otras posibles

Comportamiento ingenuo

Aprehensión operativa según las operaciones más visibles, pertinentes o no para la aprehensión discursiva

Un proceso di natural que al proceso confi realizado

3'2' Aprehensión perceptiva de una configuración gestálticaO

1 ¿cambio dimensional

cambio de anclaje?

Una aprehensión discursiva entre otras posibles

Comportamiento matemático

Aprehensión operativa con las operaciones pertinentes más allá de los factores que disparan o inhiben la visibilidad

Un proceso di teórico

Figura 8

Dos comportamientos típicos

b En la Figura 8, empezando de la misma situación geométrica (a la izquierda), son posibles dos comportamientos totalmente diferentes. Uno reacciona a lo que es espontáneamente visible (0) y el razonamiento trabaja como una descripción de los pasos del cambio configurai que guía a la solución (2). En el otro, el razonamiento empieza sólo de la aprehensión discursiva y es independiente de la visualización (3). El cambio puramente configural no proporciona los pasos y la organización del razonamiento deductivo para la demostración, pero muestra algunos puntos clave, o una idea que permite seleccionar el teorema principal a ser usado (flecha punteada 2').

Para nuestro tópico deben ser notadas dos cosas:

Para algunas situaciones geométricas el comportamiento ingenuo es eficiente, pero bajo condiciones muy estrechas. La brecha entre la aprehensión discursiva y la discursiva, debida al cambio dimensional y al cambio de anclaje, debe ser pequeña (flecha 1 en la Figura 8). Y los factores que disparan la visibilidad de las operaciones pertinentes deben ser más fuertes que aquellos que las inhiben.

Existe una *doble brecha* entre el comportamiento ingenuo y el comportamiento matemático. La primera es sobre la visualización y la segunda es sobre el razonamiento.

De aquí que deban ser desarrolladas algunas habilidades específicas de la forma común de ver las figuras y del razonamiento discursivo natural. Sería una ilusión pedagógica a causa de la visualización el plantear un comportamiento a través de la aparición de un comportamiento ingenuo (o en continuidad con él). El problema principal para le enseñanza y el aprendizaje de la geometría es cómo lograr que los alumnos caminen sobre esta doble brecha.

2.Problemas de aprendizaje y tareas de educación en geometría desde un punto de vista cognitivo

Antecedentes al problema

Debemos *corregir tres ampliamente supuestos principios* en los estudios de matemáticas educativas, a través de algunas presentaciones del constructivismo y en algunos usos de la clasificación de los van Hiele.

1. No hay una correspondencia significativa entre el desarrollo del pensamiento y la construcción de cualquier conocimiento disciplinar, y consecuentemente entre un nivel de pensamiento y un nivel de conocimiento. Desde un punto de vista desarrollista, o desde un punto de vista cognitivo, un nivel de pensamiento está descrito en términos de estructuras operativas generales, de habilidades, de capacidades limitadas, y existe el criterio de maduración que se corresponde con la adolescencia. Desde un punto de vista epistemológico, un nivel de conocimiento es relativo al campo disciplinar específico donde no está limitado el progreso en nuevas nociones, nuevos objetos, nuevas organizaciones teóricas.
2. No existe una jerarquía de desarrollo entre las diferentes clases de actividades cognitivas: visualización, razonamiento discursivo natural, razonamiento deductivo teórico, pruebas axiomáticas formales, procesos analíticos o sintéticos. De hecho, desde los niveles representativos (alrededor de 2-3 años de edad) hasta los niveles más maduros, tenemos procesos de visualización, habla, razonamiento, análisis y síntesis. Y si existen algunas interacciones entre ellos, o aún si alguno parece predominar sobre los otros en contextos particulares, estos tienen desarrollos específicos e independientes. No es necesario repetir aquí lo que hemos explicado sobre la visualización, la cual no es sólo una aprehensión perceptiva de gestalts. *El desarrollo del pensamiento es multimodal y no unimodal.* Esto regula cualquier modelo de desarrollo en el cual pudieran ser organizadas diferentes clases de actividades en una jerarquía estricta desde lo concreto hasta las más abstractas, desde la visualización hasta el rigor axiomático. Todas las representaciones semióticas, incluso las analógicas, ya son abstractas. Y muy frecuentemente lo que uno llama `concreto ´ es lo que se ha transformado en `familiar ´.
3. Los conceptos y las representaciones semióticas (figuras, diagramas, lenguajes naturales y simbólicos) no pueden ser opuestos como entidades mentales versus entidades materiales o como entendimiento versus comunicación. Los procesos matemáticos requieren el uso de diferentes registros de representaciones semióticas. A desde un puntos de vista cognitivo el desarrollo del pensamiento y el aprendizaje son logrados a través de una interiorización de varias representaciones semióticas. Esto es el porqué las representaciones mentales y las representaciones materiales no pueden ser opuestas realmente. Ambas son representaciones semióticas. Su diferencia descansa en sus modos y en sus costos de producción, pero no en su naturaleza.

El proceso de desarrollo del pensamiento: diferenciación y coordinación de registros semióticos de representación

Piaget ha establecido que el primer desarrollo cognitivo es logrado a través de la diferenciación y coordinación de esquemas [12]. En niveles posteriores, el desarrollo implica una diferenciación de los primeros registros semióticos, el lenguaje nativo y la representación icónica de formas, y su coordinación. Hemos enfatizado las dos brechas entre el comportamiento ingenuo y el comportamiento matemático en geometría. No existe un cambio progresivo desde uno al otro.

Para la visualización es necesario diferenciar entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa. ¿Cómo hacer que los estudiantes aprendan a ver el cambio configural pertinente más allá de los factores que disparan o inhiben su visibilidad? Cuando estos factores han sido identificados previamente, este aprendizaje cobra factibilidad y dan lugar a diversas transferencias (Lémonidis [7], Padilla [11]). Para el razonamiento es necesario hacer que los estudiantes descubrancómo se organiza el razonamiento deductivo y porqué esto no funciona como una argumentación o una explicación en los otros campos del conocimiento (geología, botánica, química, mecánica, historia). Esta organización no es realmente visible en las expresiones del lenguaje natural. Pero es en las expresiones en lenguaje natural que los alumnos pueden advertir esta organización específica y de su proceso (Duval [2], [5] p. 217-231) . Esta es la condición para la diferenciación del razonamiento deductivo teóricos de otras clases de razonamiento. Y no existe nada formal en este aprendizaje. Una coordinación puede ocurrir sólo cuando el alumno puede hacer estas diferenciaciones.

Tareas de la educación en geometría

Podemos regresarnos ahora a nuestra pregunta inicial: ¿porqué enseñar geometría? Hay muchas buenas razones para enseñar geometría y para enseñar más geometría. Hay tantas razones para enseñar geometría como existen posibles aplicaciones en tecnología o en el mundo real. Pero estas son buenas razones sólo para algunos alumnos, para los matemáticos, ingenieros, etc. Y no son suficientes para hacer que muchos alumnos realmente aprendan y entiendan. Allí está la complejidad cognitiva de la geometría. La enseñanza de la geometría tiene con demasiada frecuencia este extraño efecto de hacer retroceder a los alumnos. ¡Muchos estudiantes pierde la eficiencia del comportamiento ingenuo sin tener éxito en obtener una idea del comportamiento matemático! En estas condiciones, ¿porqué aprender geometría cuando muchas otras materias (lenguas nativas y extranjeras, historia, ciencias) también deben ser aprendidas? Es la complejidad cognitiva subyacente la que proporciona el interés básico de la geometría. La significación de la geometría, para cualquiera que no planea transformarse en un matemático o en un ingeniero, es desarrollar habilidades de razonamiento y de representación visual y favorecer la sinergia de estos dos procesos totalmente diferentes.

¡Y esto más allá de los contenidos particulares de tal y tal conocimiento! La geometría, más que otras áreas en matemáticas, puede ser usada para descubrir y desarrollar diferentes formas de pensamiento. Esta debe ser una tarea esencial para la enseñanza de la geometría. Pero se requiere obtener una práctica amplia y bien balanceada de estos procesos cognitivos subyacentes. Esto significa que se requieren situaciones específicas de aprendizaje para la diferenciación y coordinación entre varias clases de procesos en visualización y en razonamiento.

¿Qué hacer en el futuro?

Hemos enfatizado la complejidad cognitiva de la geometría. Pero ¿el problema de la enseñanza cambia completamente con el nuevo ambiente computacional?El recurrir a la computadora constituye una gran innovación para la enseñanza de la geometría. Las computadoras posibilitan enormemente la visualización, particularmente a través de los aspectos de movimiento (Laborde [6]). Y, como esta herramienta disocia el momento de intención (el sujeto sólo tiene que elegir una instrucción en las primitivas de un software geométrico) y el momento de producción que es ejecutado por la computadora, se abre como una aproximación `experimental ' en geometría. Cada uno puede confrontar sus anticipaciones con los resultados en la pantalla. Eso es sorprendente para las tareas de construcción. Las aproximaciones manuales, incluso con regla y compás ya no son posibles, porque algunas propiedades matemáticas están asociadas fuertemente con restricciones técnicas. Con las computadoras, es posible una verdadera exploración de las situaciones geométricas, los objetos geométricos son un poco como objetos reales que pueden ser manipulados. Pero, hasta el momento, el software geométrico está enfocado principalmente a la construcción. Y si la construcción da un gran lugar a la aprehensión discursiva y a la aprehensión secuencial de una figura, no desarrolla todas las funciones de la visualización, y en particular la `aprehensión operativa ´.

A fin de obtener, de conocer, formas eficientes de investigación de esta tarea esencial de la enseñanza de la geometría en las escuelas primarias y secundarias, aún se requiere mucha investigación de los procesos profundos de desarrollo y aprendizaje de la visualización. Estos son los pasos necesarios al futuro.

REFERENCIAS

[1] Duval, R., *Aproache cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence*, Annales de Didactique et de Sciencies cognitives, 1, 57-74, 1988.

[2] Duval, R., *Strucutre du raisonnement déductif et apprentissage de la Démonstration*, Educatonal Studies in Mathematics. 22, 3, p. 233-261, 1991.

[3] Duval R., *Argumenter, démonstrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive*, Petit x 31, 37-61, 1992.

[4] Duval, R., *Geometrical Pictures: kinds of representation and spedific proceses*, in Exiting Mental Imaginery with Computers in Mathematic Education (Sutherlan & Mason Eds), Springer p. 142-157, 1995.

[5] Duval, R., *Sémiosis et penseé humaine*, Peter Lang, Berne, 1995.

[6] Laborde, C., *enseigner la géométrie*, Bulletin de l'A.P.M.E.P., 396, 523-548, 1994.

[7] Lémonidis, E.D., *Conception, réalisation et resultants d'une experience d'ensignement de l'homothétie*, Thése U.L.P.: Strasbourg, 1990.

[8] Mesquita, A., *Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie*, Educational Studies in Mathematics, 20, 55-77, 1989.

[9] Mesquita, A., *L'infiluence des aspects figuratifs dans l'argumentation des eleves en geométrie: éléments pour una typologie*, Thèse U.L.P.: Strasbourg, 1989.

[10] Padilla, V., *Les Figures aident-elles à voir en géomêtrie?*,Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 3, 223-252, 1990.

[11] Padilla, V., *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'aprentissage des mathématiques*, Thèse U.L.P. Strasbourg, 1992.

[12] Piaget, J., *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*, Delachaux, Neuchatel, 1968.

[13] Rommevaux, M.P., *Le discernement des plans: un seuil decisive dans l'aorentissage de la géométrie tridimensionnelle*, Thèse U.L.P.: Strasbourg, 1997.

ANEXO 1

TRAZOS GEOMETRICOS

e) PROBLEMAS GEOMÉTRICOS *

1. **Dividir una recta en cinco partes iguales.** Se conocen los dos extremos de la recta por dividir. Por un extremo de ésta se traza una línea auxiliar a cualquier número de grados. Con el compás de puntas en una abertura cualquiera, se trazan cinco divisiones iguales sobre la línea auxiliar y a partir del origen de ésta; la quinta división de la auxiliar se une con el otro extremo de su recta conocida, por medio de una segunda recta auxiliar. Finalmente, se llevan paralelas a ésta a partir de cada división en la primera auxiliar, hasta intersecar a la recta original, la cual quedará dividida en las cinco partes iguales. El mismo método se utiliza para cualquier número de divisiones, llevando sobre la primera línea auxiliar el número deseado de divisiones; uniendo la última división en ésta, con el otro extremo de la recta conocida, se toma la segunda línea auxiliar; llevando paralelos a la segunda línea auxiliar por cada división de la primera auxiliar y hasta intersecar la recta original, ésta queda dividida en el número de partes iguales deseadas.

FIGURA 1.22

2. **Trazar una recta paralela a una recta conocida, pasando por un punto fuera de la recta.** Se conocen una recta y un punto fuera de la recta. Con el compás en una abertura suficiente, usando como centro el punto conocido, se traza un arco de circunferencia auxiliar que corte la recta conocida en un punto determinado; con la misma abertura en el compás, teniendo como centro la intersección de la recta y la línea auxiliar, se traza un segundo arco auxiliar que pasará por el punto original y cortará la recta conocida en un punto determinado. Con el compás, se toma la distancia existente entre este último

* En las figuras correspondientes a los problemas geométricos, las líneas rojas indican que se trata de líneas auxiliares.

punto y el punto original, llevándola a partir del cruce con la recta original y el primer arco auxiliar, sobre este último; donde interseca a éste se tiene un último punto, que al unirse con el punto original por medio de una recta, nos da la paralela deseada.

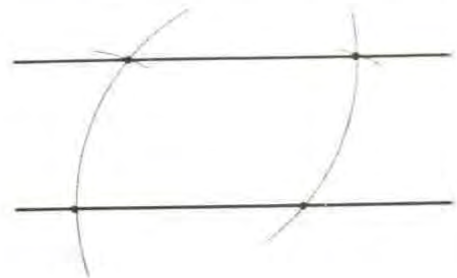


FIGURA 1.23

3. **Llevar desde un punto conocido, una perpendicular a una recta conocida.** Se conocen una recta y un punto fuera de dicha recta. Con un radio mayor que la distancia del punto a la recta, teniendo como centro el punto conocido, se traza un arco auxiliar que interseca la recta original en dos puntos. Por cada uno de éstos (con el mismo radio u otro un poco menor) como centro, se trazan dos arcos auxiliares de circunferencia, que se intersecan en otro punto. Uniendo este último punto con el punto original, por medio de una recta, se tiene la perpendicular buscada.

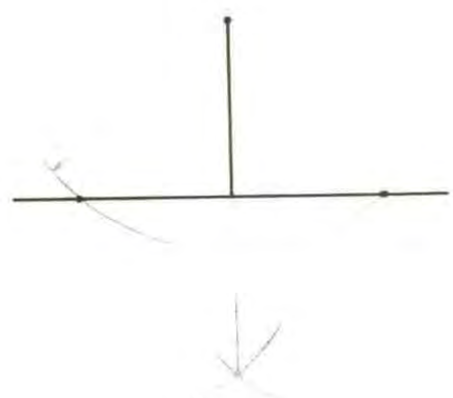


FIGURA 1.24

4. **Por un punto conocido de una recta, trazar una perpendicular.** Con un radio y un centro cualesquiera, fuera éste de la recta, trácese más de una semicircunferencia auxiliar que corte la recta en el punto conocido y en otro punto cualquiera. Unase este punto y el centro mencionado con una recta, hasta intersecar la semicircunferencia en otro punto. Uniendo este último punto con el original, por medio de una recta visible, se tiene la perpendicular buscada.

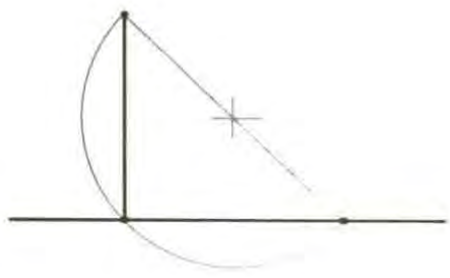


FIGURA 1.25

5. **Conocido un ángulo, trazar otro igual en cualquier posición y en otra parte.** Se conocen el ángulo original, una recta y un punto del nuevo ángulo. Con un radio cualquiera y con centro en el vértice conocido, se trazan: **a**) Un arco auxiliar que corte el ángulo conocido en dos puntos; **b**) con centro en el punto y recta donde se va a localizar el nuevo ángulo, trazar un arco auxiliar de radio igual al primer arco auxiliar, que corte a la recta en otro punto. Con el compás de puntas se toma la longitud del primer arco auxiliar, contenida entre los puntos donde se interseca con el ángulo conocido. Esta longitud se lleva a partir de donde se cortan la recta donde va a quedar el nuevo ángulo y el segundo arco auxiliar, hasta cortar éste, dándonos otro punto. Uniendo éste con el punto original, por medio de otra recta visible, se forma el ángulo buscado.

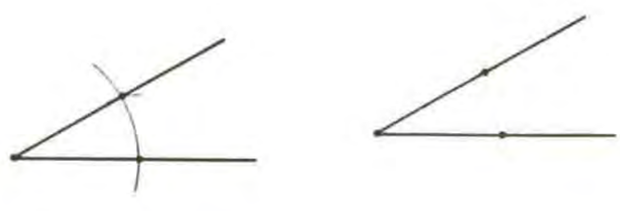


FIGURA 1.26

6. **Encontrar la bisectriz de un ángulo cualquiera.** Se conoce el ángulo por bisecar. Con un radio cualquiera, utilizando como centro el vértice del ángulo conocido, se traza un arco auxiliar, intersecando el ángulo en dos puntos. Con el mismo radio, u otro mayor, se trazan dos arcos auxiliares de circunferencia, a partir de los últimos dos puntos. Donde se intersecan estos dos últimos arcos, se tiene otro punto que, al unirse con una recta visible al vértice del ángulo original, biseca a éste.

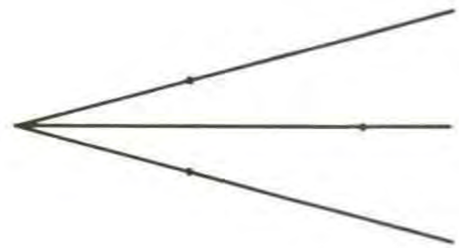


FIGURA 1.27

7. **Dividir un ángulo en 4, 8, 16, 32, etc., ángulos iguales.** Se conoce el ángulo por dividir. Primero se biseca el ángulo original, quedando dos ángulos iguales. Después se bisecan los dos ángulos y se obtienen cuatro, y así sucesivamente.

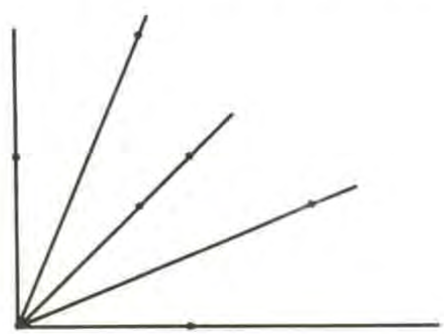


FIGURA 1.28

8. **Trazar la bisectriz de un ángulo cuyo vértice no se puede precisar.** Se conocen los dos lados del ángulo, a cualquier inclinación; pero tendiendo a la perpendicularidad, se traza una recta auxiliar, formando cuatro ángulos. Se bisecan los cuatro ángulos hacia el interior del ángulo original, con rectas

auxiliares, que se intersecan de dos en dos. Estas intersecciones se unen con una recta visible, que biseca al ángulo original.

FIGURA 1.29

9. **Construir un triángulo conociendo sus tres lados.** Se conocen las longitudes de cada lado. En el lugar donde se desee que quede uno de los lados, se traza éste con una recta visible; se toma como radio con el compás, el valor de otro lado conocido, y por un extremo de la última recta se traza un arco auxiliar. Posteriormente, se toma como radio con el compás, la longitud del tercer lado y por el otro extremo de la recta original se traza otro arco de circunferencia auxiliar. Donde se intersecan los dos arcos auxiliares, está el tercer vértice del triángulo. Uniendo el último punto con los extremos de la recta original, por medio de líneas visibles, se forma el triángulo buscado.

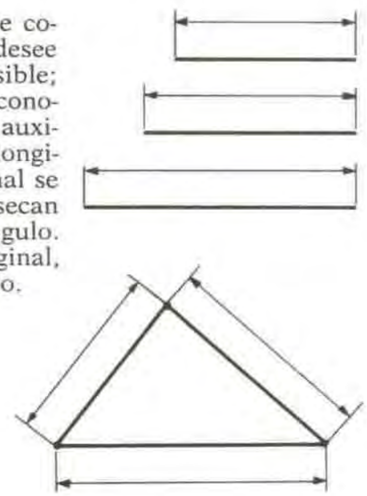


FIGURA 1.30

10. **Conocida una recta, construir sobre ella un triángulo equilátero.** Se conoce la recta, que es un lado del triángulo buscado. Con un radio igual a la longitud de la recta, se trazan dos arcos auxiliares de circunferencia, tomando como centros los extremos de la recta. Los arcos se intersecan en un punto; uniendo con rectas visibles este punto y los extremos de la recta original, se llega a obtener el triángulo deseado.

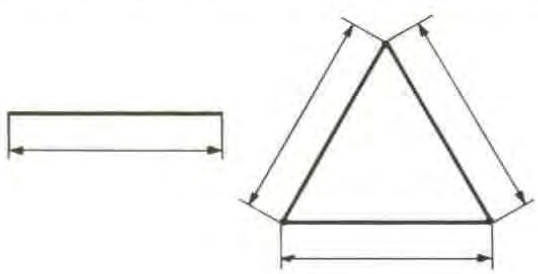


FIGURA 1.31

11. **Construir un triángulo isósceles, sobre una recta conocida.** Se conocen una recta (original) y otro lado del triángulo. Se traza la recta original (visible) en la posición deseada; con un radio igual al otro lado del triángulo, se trazan por los extremos de la recta dos arcos auxiliares que se cortan en un punto. Uniendo con rectas visibles este último punto y los extremos de la recta original, se forma el triángulo isósceles.

FIGURA 1.32

12. **Trazar un triángulo rectángulo, conociendo su hipotenusa.** Se traza la hipotenusa en el lugar deseado. Al centro de ésta, se traza una perpendicular auxiliar. Sobre esta última y a partir de su origen, se lleva con el compás la mitad de la longitud de la hipotenusa encontrándose un punto. Uniendo este punto con los extremos de la hipotenusa, por medio de rectas visibles, se forma el triángulo rectángulo.

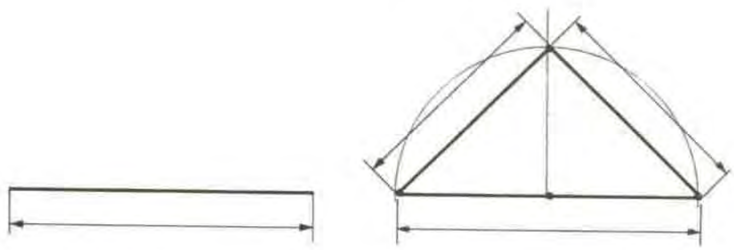


FIGURA 1.33

13. **Trazar un cuadrado conociendo uno de sus lados.** Se traza el lado conocido en el lugar deseado, con una recta visible. Por los extremos de éste, se llevan perpendiculares visibles con una longitud igual al lado conocido, dando un punto en cada perpendicular. Uniendo estos dos puntos con una recta visible y paralela a la original, se forma el cuadrado.

FIGURA 1.34

14. **Trazar un rectángulo, conociendo dos de sus lados.** Se traza uno de los lados con una recta visible en el lugar deseado. Por sus extremos y en forma perpendicular, se llevan con líneas visibles rectas de longitud igual al otro lado. Uniendo los extremos de estas rectas con otra recta visible, se forma el rectángulo.

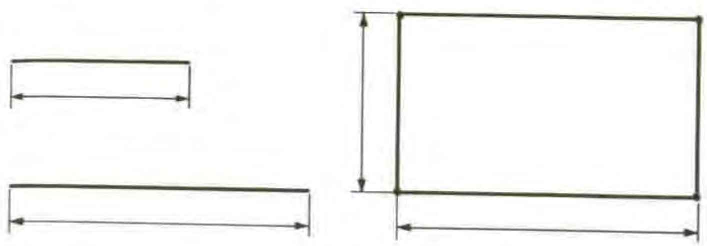


FIGURA 1.35

15. **Trazar un rombo, conociendo sus diagonales.** Se trazan las diagonales perpendiculares entre sí e intersecándose en el centro. Se unen los extremos de las diagonales con rectas visibles y queda trazado el rombo.

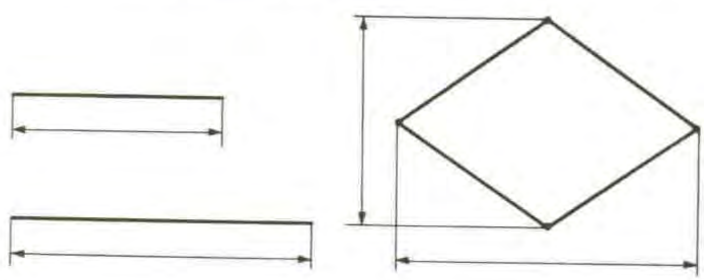


FIGURA 1.36

16. **Trazar un trapecio rectángulo, conociendo sus lados.** Se traza el ángulo recto con sus lados visibles con la longitud conocida. Por uno de los extremos del ángulo recto se lleva la longitud del otro de sus lados, en forma perpendicular con una recta visible. Uniendo la terminación de esta última línea con el otro extremo del ángulo recto original, con una recta visible, se completa el trapecio.

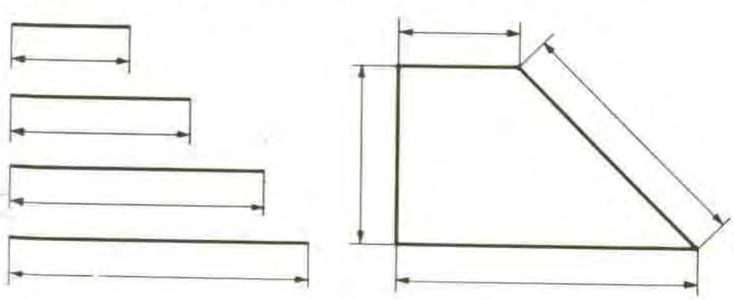
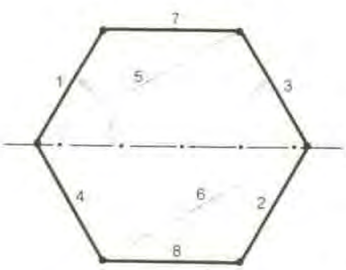


FIGURA 1.37

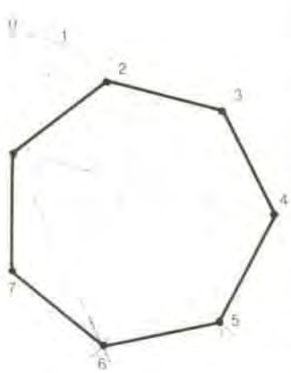
FIGURA 1.38

17. **Trazar un pentágono regular, inscrito en una circunfe-rencia.** Se conocen el diámetro y el radio de la circunferencia. Con líneas auxiliares se realizan los siguientes trazos: **a**) Un diámetro y en el centro de éste, a 90°, se traza un radio y la circunferencia respectiva; **b**) se encuentra la cuarta parte del diámetro, en un punto sobre éste; **c**) con este punto como centro, se traza un arco de circunferencia, cuyo radio será igual a la distancia de este centro a la intersección de la circunferencia y el primer radio, hasta intersecar al diámetro original en un punto; **d**) el lado del pentágono es igual a la distancia existente entre la intersección del primer radio y la circunferencia, y la intersección del último arco de circunferencia con el diámetro original; **e**) con el compás se toma la última distancia, llevándolo a través de la circunferencia, a la cual interseca en cinco puntos; **f**) finalmente, se unen estos puntos con rectas visibles, terminando el pentágono.



18. **Trazar un hexágono regular, sin compás.** Se conoce la distancia entre los extremos. Trácense las líneas en el orden y con el valor indicados en la figura.

FIGURA 1.39



19. **Trazar un polígono regular de siete lados (heptágono).** Se conoce un lado del heptágono; con éste como radio, trácese una semicircunferencia. Por tanteos, con el compás de puntas divídase la semicircunferencia en siete partes iguales y márquense los definitivos, numerándolos y trazando líneas rectas que pasen por estos puntos y el centro de la semicircunferencia (en forma de radios), prolongándolas fuera de ésta; todas las líneas mencionadas son auxiliares. Con el compás de puntas, con radio igual al lado conocido, a partir del punto 2, interséquese la prolongación de la línea recta que pasa por 3; y de este último punto interséquese la línea que pasa por 4, y así sucesivamente hasta llegar a la séptima división. Únanse con rectas visibles el centro de la semicircunferencia con el punto 2; éste, con la intersección de la recta que pasa por 3, y así hasta llegar al punto 7, en que tendremos el heptágono trazado. Igual procedimiento se sigue para cualquier polígono de mayor número de lados, moviendo solamente el número de divisiones en la semicircunferencia.

FIGURA 1.40

20. **Trazar un heptágono inscrito en una circunferencia.** Se conoce la circunferencia. Todos los trazos siguientes son con líneas auxiliares, hasta que se indique lo contrario. Trácese la circunferencia y también sus ejes, prolongando indefinidamente uno de ellos. Con radio igual al diámetro de la circunferencia y por un extremo del eje no prolongado, trácese un arco de circunferencia hasta intersecar la prolongación del primer eje. Únanse con una recta indefinida el último punto y el punto donde se intersecan la circunferencia original y el último arco trazado. Divídase esta recta en siete partes iguales, con el compás de puntas (la abertura puede ser cualquiera, pero siempre la misma en este caso) y numérese como se indica. Únase con otra recta al punto 7 y el extremo del diámetro que sirvió como centro para trazar el arco de circunferencia mencionado. Trácese una paralela a esta última recta, que pase por el punto 2, hasta intersecar al primer eje de la circunferencia con el diámetro no prolongado en un punto. Únase con otra recta este último punto y la intersección del arco de circunferencia y la recta dividida en las siete partes iguales; prolónguese esta recta hasta intersecar la circunferencia. Esta intersección, unida por recta visible con el punto de intersección del arco de circunferencia y la circunferencia, nos da el lado del heptágono. Posteriormente, con el compás de puntas abierto a una distancia igual al lado del heptágono, se marcan puntos sobre la circunferencia, los cuales, unidos por rectas visibles uno después del otro, nos dan el heptágono deseado. El mismo método puede usarse con cualquier polígono (regular) mayor de seis lados, variando únicamente las divisiones de la recta.

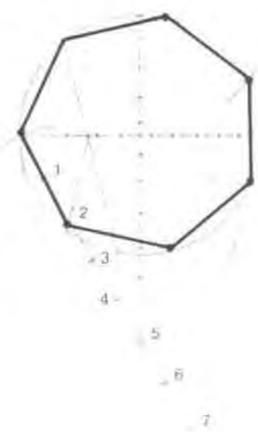


FIGURA 1.41

21. **Enlazar varios arcos de circunferencia, con una recta.** Se conocen los radios y la recta. Primeramente se traza con línea visible la recta conocida. Por el punto de enlace, se le traza en forma perpendicular una recta auxiliar. Con el compás de puntas, haciendo centro en el punto de enlace, se llevan los radios conocidos y marcándolos en la recta auxiliar. Finalmente, se trazan con líneas visibles los arcos deseados, haciendo centro en los puntos marcados sobre la recta auxiliar y con la puntilla del compás en el punto de enlace.

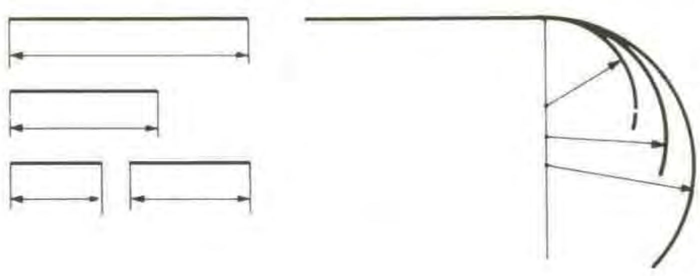


FIGURA 1.42

22. **Enlazar con un arco de circunferencia un punto situado sobre una recta, con otro punto situado fuera de ella.** Se unen los dos puntos con una recta auxiliar, a la cual se le traza una perpendicular auxiliar también que pase por su punto medio. Posteriormente, se traza una perpendicular auxiliar también a la recta original primera, por el punto de enlace. Esta última perpendicular se interseca con la otra, en el centro del arco deseado. Con este punto como centro y con la puntilla del compás en el punto de enlace, se traza el arco buscado.

FIGURA 1.43

23. **Enlazar con un arco de circunferencia de radio conocido, rectas oblicuas entre sí, también conocidas.** Todos los trazos son auxiliares, hasta que se indique lo contrario. Se trazan las rectas. A continuación se trazan paralelas a las rectas, separadas por una distancia igual al radio del arco de circunferencia; los paralelos se intersecan en un punto que es el centro del arco. La longitud del arco es igual a la distancia comprendida entre perpendiculares a las rectas, que pasen por el centro del arco. Finalmente se traza el arco con línea visible y, a partir de los puntos de enlace en las rectas originales, éste se convierte en visible.

FIGURA 1.44

¿Cómo trazar un polígono regular?

Método 1. *Conocido el lado del polígono.*

Sea el segmento AB el lado del polígono regular.

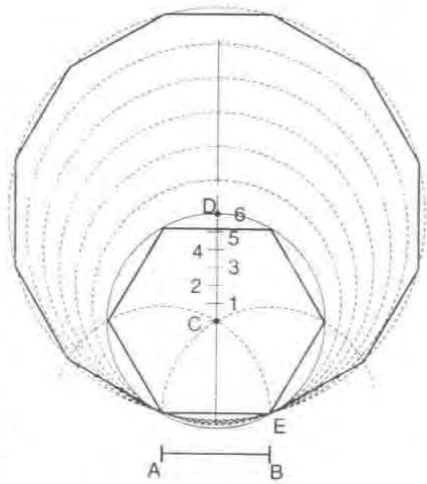
1. Traza dos arcos desde los extremos del segmento y así obtienes el centro C.

2. Con centro en C, traza la circunferencia que contiene 6 veces el lado AB.

3. Divide el radio DC en seis partes iguales, para obtener los puntos 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

4. Si haces centro en 1 y radio 1E, obtendrás una circunferencia que contiene siete veces el lado AB.

5. Si continúas así hasta llegar a tener como centro el punto 6 y radio 6E, obtendrás una circunferencia que contiene doce veces el lado AB.



¿Cómo trazar un polígono regular?

Método 2. *Dada una circunferencia.*

Sea dividir la circunferencia en 7 partes iguales.

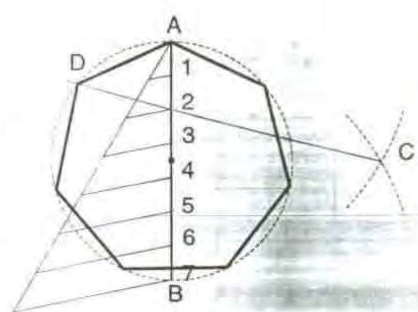
1. Dibuja la circunferencia dada.

2. Divide el diámetro AB en el mismo número de partes en que se quiere dividir la circunferencia (en este caso, 7).

3. Toma como radio el diámetro de la circunferencia y centro en los extremos de éste, A y B; describe dos arcos que se intersequen en C.

4. Mediante una recta, une el punto C con el 2 y prolóngalo para obtener el punto D.

5. El arco AD es la séptima parte de la circunferencia.



24. **Enlazar con una semicircunferencia en uno de sus extremos a dos líneas paralelas de igual longitud.** Se trazan, con líneas visibles, las rectas paralelas. Con una perpendicular auxiliar, se unen en el extremo deseado, la cual en su media longitud contiene el centro de la semicircunferencia; se traza ésta con un radio igual a la perpendicular auxiliar.

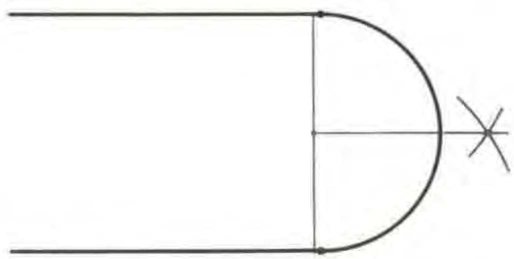


FIGURA 1.45

25. **Enlazar dos líneas paralelas de diferente longitud mediante dos arcos de circunferencia de radios distintos.** Se unen los extremos de las paralelas con una recta (todas estas líneas son auxiliares, hasta que se indique lo contrario). Se prolongan los paralelos en el mismo sentido, una distancia igual a la mitad de la distancia entre sus extremos, uniendo con otra recta los nuevos extremos. Se bisecan los ángulos tomados entre las prolongaciones y la última recta, hasta encontrarse la bisectriz de cada uno de éstos, con una perpendicular a cada paralela que pase por el punto de tangencia, intersecándose en dos puntos, que son los centros de los arcos buscados. Se unen los dos centros con otra recta, hasta intersecar la paralela a la unión de los puntos de enlace, en otro punto; en este último punto es donde se enlazan los dos arcos. Finalmente, se traza con línea visible y radio igual a la distancia de su centro a la paralela respectiva (sobre su perpendicular), cada arco, enlazándose entre ellos en el punto ya señalado.

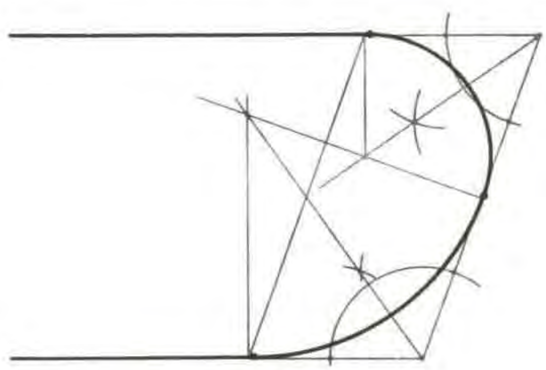


FIGURA 1.46

26. **Localizar el centro de una circunferencia conocida.** Con líneas auxiliares únicamente, háganse los siguientes trazos: una cuerda cualquiera; por sus extremos y perpendiculares a ésta, trácense otras dos cuerdas y únanse entre sí los extremos más alejados de las dos últimas cuerdas y la primera. Donde se intersecan las uniones mencionadas está el centro de la circunferencia.

FIGURA 1.47

27. **Trazar una circunferencia de radio conocido, tangente a una recta, pasando por un punto determinado, fuera de la recta.** Se conoce la recta y el punto fuera de ésta. Entre el punto y la recta, trazar otra recta paralela y auxiliar, a una distancia igual al radio conocido. Haciendo centro en el punto conocido y con el compás abierto a una distancia igual al radio, trácese un arco auxiliar hasta cortar la recta auxiliar. En el punto donde se intersecan el arco y la recta, ambos auxiliares, se encuentra el centro de la circunferencia, la cual se traza con línea visible.

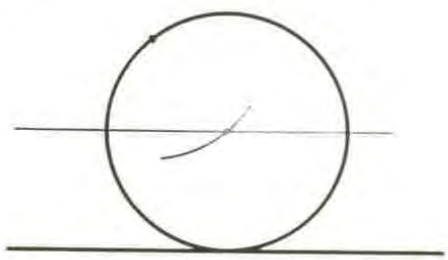


FIGURA 1.48

28. **Trazar una circunferencia que sea tangente a una recta conocida, en un punto de ésta, y que pase por un segundo punto fuera de la recta.** Se conocen la recta visible, un punto en la recta, y otro punto fuera de la recta. Únanse los puntos con una recta auxiliar, trazándole a ésta una mediatriz auxiliar e indefinida; por el punto en la recta, trácese una perpendicular a ésta hasta cortar a la mediatriz; en este punto se encuentra el centro de la circunferencia. Con radio igual a la distancia del centro al punto de la recta, trácese la circunferencia.

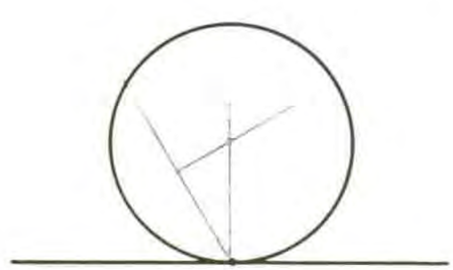


FIGURA 1.49

29. **Trazar una circunferencia que pase por tres puntos conocidos.** Únanse el primero y el segundo puntos con una recta auxiliar, y hágase lo mismo con el segundo y tercer punto; posteriormente, trácense mediatrices auxiliares, a las primeras rectas. Donde se intersecan las mediatrices está el centro de la circunferencia; trácese ésta con radio igual a la distancia del centro a cualquiera de los puntos.

FIGURA 1.50

30. **Trazar una tangente a una circunferencia, desde un punto exterior.** Se conocen la circunferencia y el punto. Únanse con una recta auxiliar, el punto y el centro de la circunferencia. Con diámetro igual a esta distancia, trácese una semicircunferencia auxiliar que intersecará a la circunferencia original en un punto. Uniendo este punto con el localizado fuera de la circunferencia, por medio de una recta visible, se tiene la tangente buscada.

FIGURA 1.51

31. **Trazar una circunferencia de radio R, tangente a otras dos circunferencias conocidas. Primer caso:** Los centros de las circunferencias conocidas son exteriores a la buscada; $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ son los radios de las circunferencias conocidas; con centro en la circunferencia de $\mathbf{R}_1$, trácese un arco auxiliar de radio igual a $\mathbf{R} + \mathbf{R}_1$; con centro en la circunferencia de $\mathbf{R}_2$, trácese un segundo arco auxiliar cuyo radio sea igual a $\mathbf{R} + \mathbf{R}_2$; donde se intersecan los dos arcos auxiliares está el centro buscado; posteriormente, trácese la circunferencia de radio **R**; los puntos de tangencia están en una recta que une a cada centro de los radios $\mathbf{R}_1$ y **R**, $\mathbf{R}_2$ y **R**. **Segundo caso:** Los centros de las circun-

125

ANEXO 2

CABRI-GEOMETRE II

INTRODUCCIÓN

De 1991 a la fecha han aparecido varios programas de cómputo que permiten, por medio del ratón, hacer construcciones geométricas que incluyen todas las que pueden hacerse con regla y compás. Estos programas no paran allí: comparten un carácter dinámico consistente en la posibilidad de defomar una figura construída arrastrando uno de sus elementos con el ratón. Más aún, al variar de esta manera un elemento, los demás se reconstruyen del mismo modo que se construyeron originalmente, y lo hacen en tiempo real. Se generan así en un tiempo brevísimo, un enorme número de instancias de una figura. Con ello, la geometría cobra vida ante nuestros ojos y la experimentación se hace posible. Por ejemplo, si se dibuja un triángulo, los puntos medios de sus lados y los segmentos que unen a éstos con los vértices opuestos se verá que dichos segmentos se cortan en un punto. Si Ahora Arrastra uno de los vértices se generará una serie de triángulos (que se visualizan como una deformación continua del original), todos con cada vértice unido al punto medio del lado opuesto, y en todos ellos se verá que los segmentos mencionados se cortan en un punto. Este hecho pausiblemente conducirá al estudiante a conjeturar o incluso a afirmar que tal es el caso siempre.

Más en general, el uso de un programa de geometría dinámica posee varias ventajas sobre la enseñanza centrada en el pizarrón:

- La distinción entre *figura* y *dibujo* (ejemplo específico, concreto, de una figura) es inmediato.
- Lo anterior propicia la formación de conceptos geométricos adecuados.
- La generalidad de una afirmación está ya contenida en la construcción de la que surge.
- El ambiente creado por el programa facilita la exploración y la formulación de conjeturas.
- El usuario dispone de medios para confirmar o rechazar sus conjeturas.

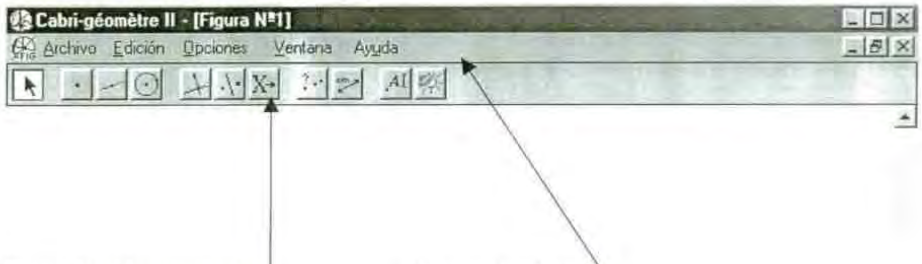
Las posibilidades didácticas de esta clase de programas son inmensas y se están explorando en todo el mundo, México incluido.

Con vistas a enriquecer la enseñanza de la geometria en la escuela secundaria, se ha elegido el programa de geometría dinámica *Cabri-Geomètre II* y se ha elaborado material que cubre los temas geométricos que señalan los planes de estudio oficiales para el primer grado.

El material consiste de diez lecciones acompañadas de numerosas actividades. Las lecciones han sido diseñadas con un doble propósito: enseñar por una parte la forma de emplear el *Cabri* , y por otra, presentar los contenidos geométricos del plan de Estudios.

Las lecciones introducen las herramientas del *Cabri* y conducen al estudiante a construir los conceptos geométricos básicos; las actividades proponen una exploración que parte de esa base y se espera lleve al estudiante a formular conjeturas y a concebir estrategias para confirmarlas.

Pantalla principal y Botones de herramientas del CABRI-GEOMETRE II

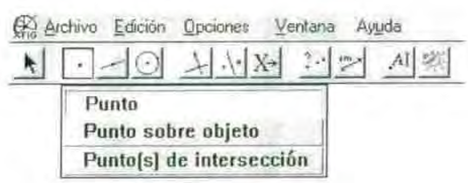


Barra de Herramientas **Barra de Menús**

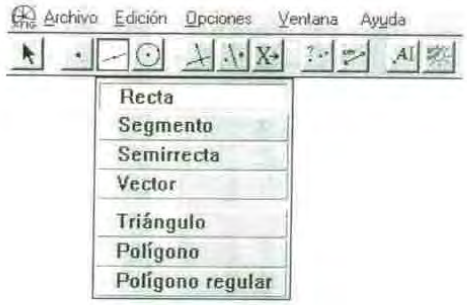
La barra de Herramientas está formada por once botones los cuales reciben un nombre en especial. Cada uno de estos botones, al dar un click sobre él, manteniendo oprimido el botón izquierdo del ratón (Mouse), muestra las herramientas que contiene.

Botón Puntero, contiene las cuatro herramientas.

Botón Puntos:

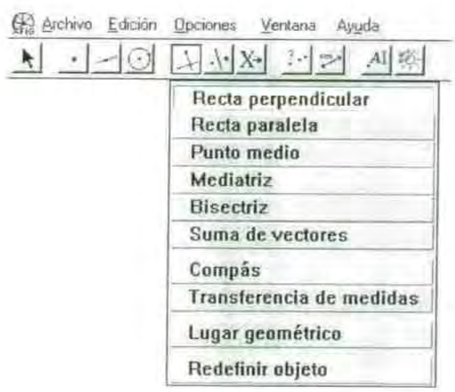


Botón Rectas:



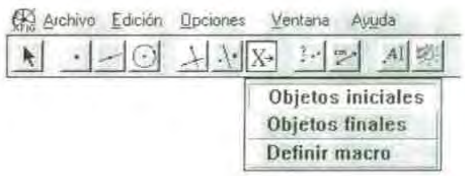
Botón Curvas:

Botón Construir:



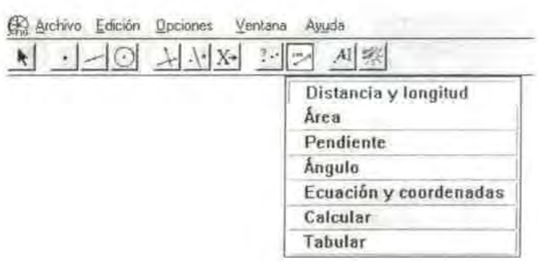
Botón Transformar:

Botón Macros:

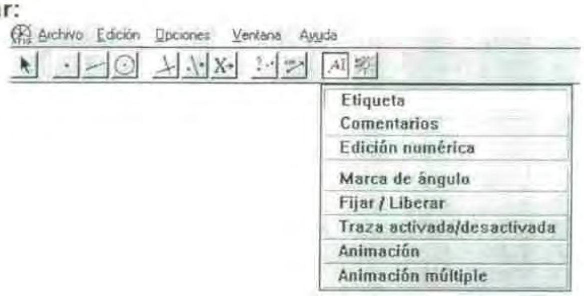


Botón Verificar:

Botón Medir:



Botón Mostrar:



Botón Diseñar:

LECCION 1.1
PUNTOS, RECTAS, ANGULOS, CIRCUNFERENCIA

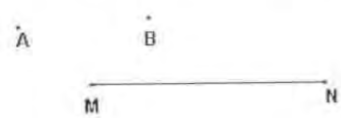
Puntos, rectas, semirrectas.

1) Presiona sin soltar el botón **Puntos** para que se abra la caja de herramientas. Selecciona **Punto** y luego da un click en dos puntos distintos de la pantalla.

2) Presiona sin soltar el botón **Rectas** para que se abra la caja de herramientas. Selecciona **Segmento** y luego construye un segmento dando un click sobre la pantalla y luego otro click en otro sitio.

3) Presiona sin soltar el botón **Mostrar** para abrir la caja de herramientas. Selecciona **Etiqueta** y da un click sobre uno de los puntos trazados anteriormente. Cuando aparezca el recuadro pidiendo la letra que le quieres poner a dicho punto escribe A. Haz lo mismo con el otro punto poniendo la etiqueta B.

4) Siguiendo el mismo procedimiento, pon las etiquetas M y N a los extremos del segmento trazado anteriormente.



5) Desactiva **Etiqueta** presionando el botón **Puntero**

6) Da un click sobre el punto M y mantén presionado hasta que aparezca la figura, arrástralo a cualquier sitio de la pantalla. ¿ Qué le ocurre al segmento?

____

7) Ahora da un click en cualquier punto del segmento MN que no sean los extremos, y mantén presionado hasta que aparezca la figura y luego arrástralo ¿ qué le sucede al segmento?

____

8) Traza el punto P sobre el segmento MN y luego arrastra P

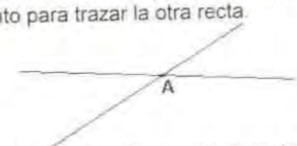
¿ qué le sucede a P ?

____

9) Traza un punto G en cualquier punto de la pantalla y luego presiona el botón **Rectas** para abrir la caja de herramientas. Selecciona **Semirrecta,** da un click sobre G y luego otro en cualquier otro punto de la pantalla.

Arrastra enseguida G o la semirrecta. ¿ Qué sucede cuando arrastras G ? ¿ qué sucede cuando arrastras la semirrecta ?

10) Presiona sin soltar el botón **Rectas** para que se abra la caja de herramientas. Selecciona **Recta** y luego haz click sobre el punto A y luego en cualquier parte de la pantalla. Sigue el mismo procedimiento para trazar la otra recta.

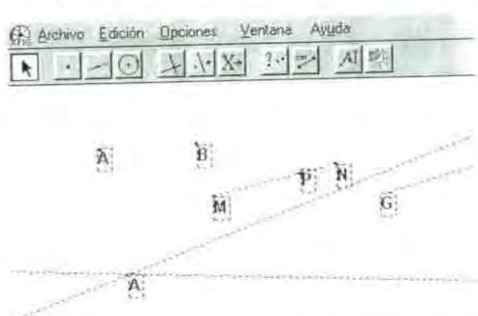


¿Qué le sucede a las rectas cuando arrastras cualquiera de ellas ?

¿Qué ocurre cuando arrastras el punto A ?

11) Para borrar todo lo que tengas en la pantalla haz click en la opción **Edición** de la barra de herramientas y sin dejar de presionar desplaza el puntero hasta **Seleccionar todo**

suéltalo y verás todas las figuras y etiquetas con lineas punteadas



presiona enseguida la tecla **Delete** del teclado de tu computadora y quedarán borradas (en algunas computadoras la tecla es **Supr** en lugar de Delete)

Ángulos, Circunferencias, arcos

12) Para construir un ángulo cuyo vértice sea R, presiona sin soltar el botón **Rectas** y selecciona **semirrecta.** Da un clic sobre R y luego en otro punto de la pantalla. Para trazar el otro lado del ángulo se sigue el mismo procedimiento.

R

Arrastra cualquiera de los lados del ángulo. ¿qué le ocurre al ángulo?

Arrastra R, ¿qué le pasa al ángulo?

13) Presiona sin soltar el botón **Curvas** para abrir la caja de herramientas. Selecciona **Circunferencia**, Da enseguida un click en cualquier sitio de la pantalla y luego un segundo click en otro lugar, deberá de aparecer una circunferencia, Ponle etiqueta O al centro de esta circunferencia. Presiona el botón **Puntero** para que se desactive etiqueta, luego arrastra el punto O. ¿Qué le sucede a la circunferencia?

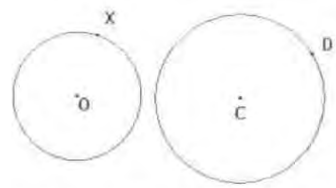
15) Haz click en cualquier punto de la circunferencia y luego arrástralo ¿cambia el radio? ¿se mueve el centro?

16) Presiona **Puntero** para desactivar cualquier herramienta que hubieras usado. Luego traza dos puntos en cualquier sitio de la pantalla y ponles la letra C y D. Traza una circunferencia cuyo centro sea C y radio CD. ¿qué le ocurre a la circunferencia cuando arrastras el punto C?

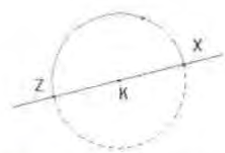
¿Qué sucede cuando arrastras D?

17) ¿Cuál es la diferencia entre la circunferencia con centro en O y la que tiene su centro en C cuando arrastras O y cuando arrastras C?

18) Coloca un punto X sobre la circunferencia cuyo centro es O. Arrastra el punto X. ¿qué le ocurrió al punto X?¿qué le sucedió a la circunferencia?



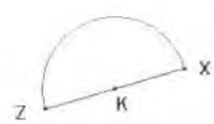
19) Traza los puntos K y X. Tomando como centro K, traza una circunferencia cuyo radio sea KX. Traza la recta que pasa por K y por X, marca la otra intersección con la circunferencia y llámala Z. Presiona el botón **Curvas** y selecciona **Arco** y luego da un click en X, enseguida en cualquier otro punto de la circunferencia y finalmente en Z.



20) A continuación presiona el botón **Diseñar** y selecciona **Ocultar/mostrar.** Da un click en cualquier punto de la circunferencia y en cualquier punto de la recta ¿qué ocurrió?

____

Traza el segmento XZ



¿Qué figura quedó cuando ocultaste la circunferencia y la recta XZ?

____

¿Qué le sucede a la figura que obtuviste cuando arrastras X? ¿qué le sucede cuando arrastras K?

____

¿Se modifica la figura que obtuviste si arrastras Z? ¿por qué?

____

LECCION 1.2
MEDICIONES

1) Construye el segmento MN. Presiona sin soltar el botón **Medir** para que se abra la caja de herramientas y selecciona **Distancia y longitud.** Da un click sobre el segmento ¿Qué sucede?

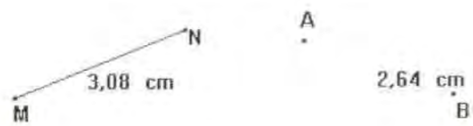
____

Presiona **Puntero** para desactivar distancia y longitud y luego arrastra cualquiera de los extremos del segmento MN ¿Qué le ocurre a la longitud del segmento?

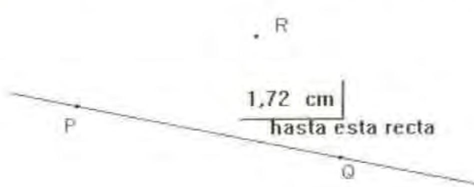
____

2) Traza en cualquier sitio de la pantalla los puntos A y B. Presiona el botón **Medir** y luego selecciona **Distancia y longitud.** Da un click sobre A y enseguida otro sobre B. ¿qué ocurre? Desactiva **Distancia y longitud** presionando **Puntero** y luego arrastra primero A y luego B y anota todo lo que observaste al arrastrarlos.

____



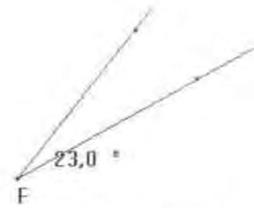
3) Traza la recta PQ y un punto R fuera de ella. Para encontrar la distancia que hay de R a PQ presiona el botón **Medir** y luego selecciona **Distancia y longitud.** Da un click sobre R y luego sobre el segmento PQ y cuando aparezca la siguiente figura da otro click en cualquier parte de la pantalla.



Arrastra el punto R o la recta PQ ¿qué ocurre?

____

4) Traza un ángulo cuyo vértice sea F. Sin soltar presiona el botón **Medir** para abrir la caja de herramientas y selecciona **Ángulo.** Da un click en un algún punto de uno de sus lados, luego en el vértice F y finalmente en el otro lado. Desactiva el botón **Rectas** presionando el botón **puntero**.



Arrastra cualquiera de las semirrectas (no los puntos). ¿Qué le ocurrió a la medida del ángulo?

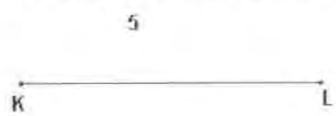
___

Ahora arrastra el vértice F ¿se modifica la medida del ángulo? ___

5) Presiona sin soltar el botón **Mostrar** para abrir la caja de herramientas y luego selecciona **Edición numérica** , da un click en cualquier parte de la pantalla y cuando aparezca un recuadro de la forma

escribe un número (por ejemplo 5). Presiona **Puntero** para desactivar Edición numérica. Traza enseguida en cualquier punto de la pantalla el punto K

6) En la caja **Construcciones** selecciona **Transferencia de medidas,** da click sobre el número, luego click sobre el punto K y otro en cualquier sitio para obtener el punto L.

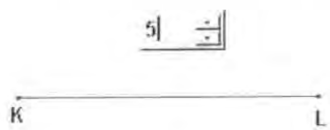


Traza el segmento KL y mide este segmento ¿ Mide 5 cm? ___

¿Qué tendrías que hacer para trazar un segmento cuya longitud sea 3cm? Escribe todos los pasos

___

7) Desactiva **distancia y longitud.** Enseguida, haz doble click sobre el número que escribiste y cuando aparezca



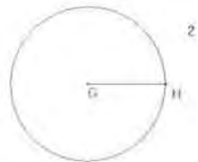
haz click sobre el botón **Flecha arriba** ¿ Qué le sucedió a la longitud de KL?

___

Da un click sobre el botón **Flecha abajo** ¿qué le ocurre a longitud de KL?

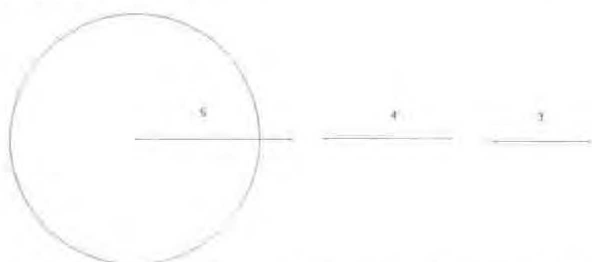
____

8) Traza el segmento GH de 2 cm de longitud y luego construye circunferencia con centro en G y cuyo radio sea GH

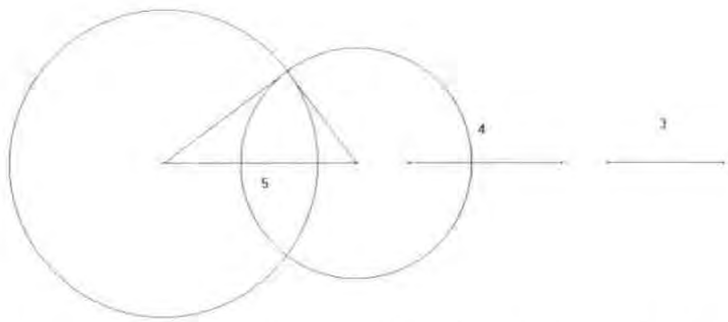


9) Para construir un triángulo cuyos lados miden 5 cm, 4 cm y 3 cm se construye un segmento cuya longitud sea 5 cm como lo hiciste en los puntos 5 y 6, enseguida se construye el de longitud 4 de la misma manera que el anterior y finalmente el que tiene longitud 3. (No importa en que orden los construyas)

A continuación presiona sin soltar el botón **construcción** y selecciona la herramienta **Compás,** haz un click sobre el segmento de longitud 4 y luego click en uno de los extremos del segmento de longitud 5 y verás



Enseguida usando de nuevo **Compás** da un click sobre el segmento de longitud 3 y otro click sobre el otro extremo del segmento de magnitud 5. Finalmente traza segmentos desde los extremos de este último hasta alguno de los puntos de intersección de las circunferencias obtenidas.



Oculta las circunferencias y los segmentos, menos los números de sus longitudes ¿Cómo puedes verificar que el triángulo obtenido tienen las medidas de 5, 4 y 3 cm?

____

10) Aumenta la longitud del segmento de 5 cm tal como lo hiciste en el punto 7 ¿qué le pasa al triángulo cuando la longitud es 7 cm? ¿Por qué?

____

Disminuye la longitud del mismo segmento ¿qué le pasa al triángulo cuando la longitud es 2?¿por qué?

____

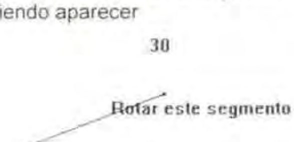
11) Haz lo mismo con el segmento de longitud 4 y encuentra la longitud más grande que debe tener dicho segmento para que siga siendo triángulo y cual debe ser la más chica.

____

12) Para trazar un ángulo de 30 grados, traza un segmento, luego presiona el botón **Mostrar** y selecciona **Edición numérica** tal como se hizo en el punto 5

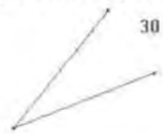
30

A continuación presiona el botón **Transformar** y selecciona **Rotación,** luego pon el puntero sobre al segmento debiendo aparecer

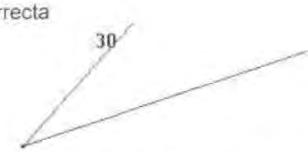


Da un click sobre el segmento y luego dirige el puntero a uno de los extremos del segmento, verás

Da click sobre el extremo y luego sobre el número 30 y obtendras un ángulo de 30 grados

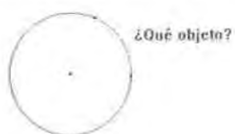


Puedes intentarlo con una semirrecta

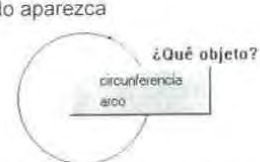


13) Traza una circunferencia y luego un arco sobre ella como lo hiciste en el punto 18 del Tema 1.1

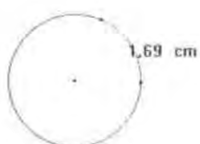
Presiona el botón **Medir** , selecciona **Distancia y longitud,** acerca el puntero al arco y cuando veas



da un click sobre el arco y cuando aparezca



selecciona **arco** y verás la longitud del arco comprendido entre esos puntos.

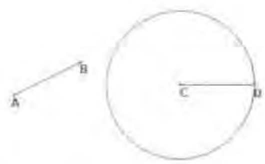


LECCION 1.3
REPRODUCCIONES

1) Trazar el segmento AB y un punto C fuera del segmento.

2) Para reproducir el segmento AB presiona el botón **Construcciones** y selecciona **Compás.** Haz un click en el segmento AB y luego en C. Deberá aparecer una circunferencia con centro en C.

3) Traza enseguida el punto D sobre cualquier punto de esta circunferencia y construye el segmento CD.



4) Mide AB y CD ¿ Por qué tienen la misma medida ?

____

5) Presiona el botón **Diseñar** y selecciona **Ocultar/mostrar.** Haz click en la circunferencia ¿ qué ocurrió ?

____

6) Desactiva **Ocultar/mostrar** presionando el botón **Puntero** . Arrastra A o B ¿ Qué le ocurre al segmento CD?

____

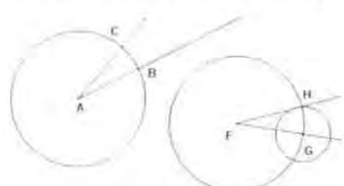
7) ¿Puedes arrastrar C o D?¿ Por qué crees?

____

8) Si deseas, puedes borrar lo que tengas en la pantalla procediendo como lo hiciste en el punto 11 del Tema 1

9) Construye un ángulo cuyo vértice sea A , y esté formado por dos semirrectas.

Para reproducir dicho ángulo como se muestra en la siguiente figura,



traza primermente una circunferencia con centro en A que interseque los lados del ángulo en B y C.

10) Traza una semirrecta a partir del punto F y reproduce en F la longitud AB con el uso de **compás** haciendo click en A, luego en B y finalmente en F. Usando de nuevo **compás** toma la longitud BC y trasládala a G para obtener el punto de intersección H. Traza las semirrectas FG y FH.

11) Arrastra el punto A. ¿Se modifica la amplitud del ángulo BAC? ______________________

Se modifica la amplitud del ángulo GFH? ______________________

12) ¿Cómo puedes comprobar que los ángulos ABC y FGH son iguales?

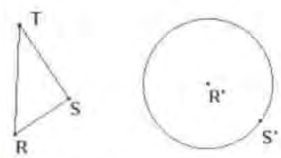
____

13) Arrastra la semirrecta AB y luego la semirrecta AC ¿se modifican los valores de los ángulos?

14) Oculta las circunferencias usando **diseñar** y seleccionando **ocultar/mostrar** y luego **puntero** para desactivar dicha herramienta ¿qué pasó con las circunferencias y que con los ángulos?

____

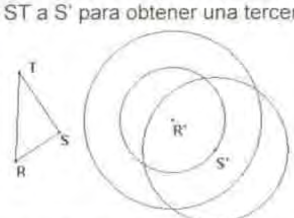
15) Para reproducir un triángulo RST traza el punto R' y luego con el uso del **compás** traslada la longitud RS a R' y coloca el punto S' en cualquier punto de la circunferencia obtenida



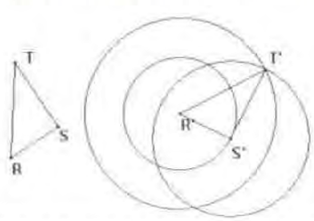
¿por qué son iguales las longitudes RS y R'S'?

____

Luego toma la longitud RT y trasládala a R' para obtener una segunda circunferencia, a continuación traslada la longitud ST a S' para obtener una tercera circunferencia

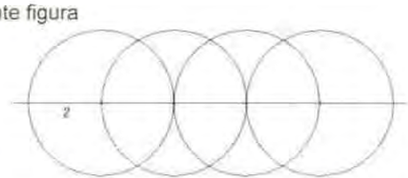


Finalmente forma el triángulo cuyos vértices son R', S' y el punto de intersección de las dos últimas circunferencias.

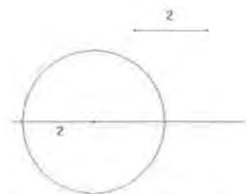


¿cómo puedes comprobar que dichos triángulos son iguales? Escríbelo.

15) Para reproducir la siguiente figura



traza primeramente un segmento de longitud 2 como se hizo en el punto 6 del capítulo MEDICIONES. Enseguida traza una recta y con **compás** da un click en el segmento de longitud 2, luego haz click en el punto de la recta



¿Cómo le haces para completar la figura propuesta?Escríbelo.

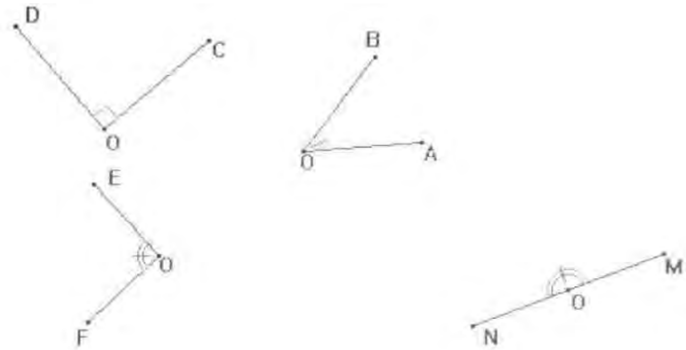
ACTIVIDADES DE LAS LECCIONES 1

ACTIVIDAD 1.1

Traza el círculo con centro en O y radio igual a 3.5 cm tal como lo hiciste en el punto 5 del Tema 1.2

Traza un segmento AB de 5 cm de longitud y luego una circunferencia que pase por sus extremos y cuyo diámetro es AB

ACTIVIDAD 1.2



1) Mide los siguientes ángulos tal como lo hiciste en el punto 4 de la Lección 1.2
2) AOB es un ángulo Agudo. Arrastra el vértice o los extremos ¿qué propiedades tiene?

____

____

3) COD es un ANGULO RECTO. Arrastra el vértice o los extremos ¿qué propiedades tiene?

____

____

4) EOF es un ANGULO OBTUSO. Arrastra el vértice o los extremos ¿qué propiedades tiene?

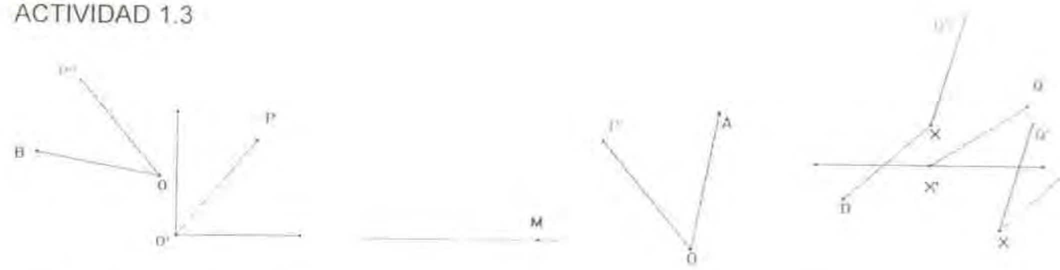
____

____

5) MON es un ANGULO LLANO (También se le llama de lados colineales porque ambos lados está sobre la misma recta). Arrastra el vértice o los extremos ¿qué propiedades tiene?

____

ACTIVIDAD 1.3



1) A los ángulos BOP" y AOP' se les llama COMPLEMENTARIOS, mídelos y encuentra su suma Arrastra el punto P ¿se modificó la suma?

____

2) Arrastra el punto M hasta que el vértice O de los dos ángulos coincidan en O' ¿cuánto mide el ángulo AOB?

____

3) ¿Cuál sería la condición para que dos ángulos sean complementarios?

____

4) A los ángulos CXQ' y DXQ" se les llama SUPLEMENTARIOS, mídelos y encuentra su suma. Arrastra el punto Q ¿se modificó su suma?

____

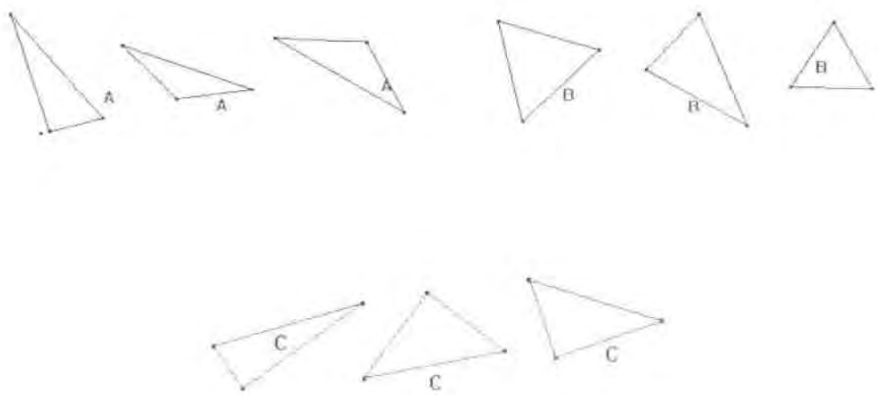
5) Arrastra el punto N hasta que el vértice X de los dos ángulos coincida con X' ¿cuánto mide el ángulo CXD?

____

6) ¿Cuál es la condición para que dos ángulos sean suplementarios?

____

ACTIVIDAD 1.4



1) Mide todos los ángulos de cada uno de los triángulos
2) A los triángulos señalados con la etiqueta A se les llama OBTUSANGULO, ¿qué propiedades debe tener un triángulo para que sea obtusángulo?

____

____

3) A los triángulos señalados con la etiqueta B se les llama ACUTANGULO ¿qué propiedades debe tener un triángulo para que sea Acutángulo?

____

____

A los triángulos señalados con la etiqueta B se les llama RECTANGULO ¿qué propiedades debe tener un triángulo para que sea rectángulo?

____

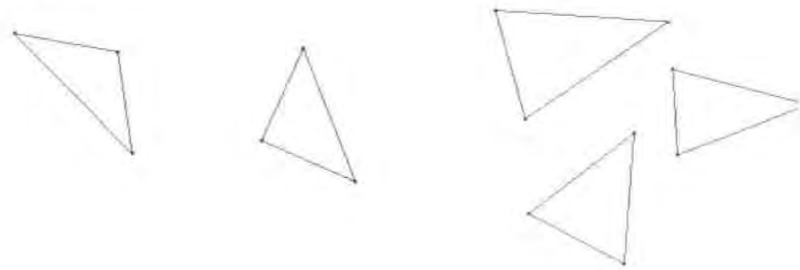
____

4) Arrastra los vértices de color rojo de cada triángulo ¿conservan las propiedades que habías encontrado?

____

____

ACTIVIDAD 1.5



Los triángulos que se muestran se les llama ISOSCELES.

1) Mide sus lados
2) ¿qué tienen en común estos triángulos?

___

3) Arrastra sus vértices ¿siguen teniendo algo en común?

___

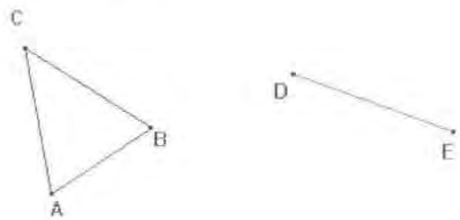
4) De acuerdo con lo que has observado ¿qué propiedades debe tener un triángulo para que sea isósceles?

___

5) Mide los ángulos de cada uno de los triángulos ¿qué puedes concluir?

___

ACTIVIDAD 1.6



1) El triángulo ABC es isósceles. Compruébalo haciendo mediciones
2) En ese mismo triángulo, si trazas una circunferencia con centro en C y radio CA ¿Pasa también por B?¿Por qué? Arrastra A, B o C ¿qué le ocurrió a la medida de sus lados?¿sigue siendo isósceles?

____

____

3) Mide los ángulos ¿De que manera están relacionados los lados con los ángulos?

____

4) Arrástra cualquiera de los vértices ¿qué observas?

____

____

5) Encuentra un punto X de manera que las longitudes XE y DE sean siempre iguales y forma un triángulo con los 3 puntos. Mide los lados, ¿es isósceles?

____

____

4) Traza un triángulo isósceles cuyos lados iguales midan 5 cm y el lado desigual mida 3 cm

ACTIVIDAD 1.7

1) Haciendo centro en A traza una circunferencia cuyo radio sea AB
2) Haciendo centro en B traza una circunferencia cuyo radio sea BA
3) ¿Todos los puntos de la circunferencia cuyo centro sea A están a la misma distancia de A?¿por qué?

____

____

4) ¿Todos los puntos de la circunferencia cuyo centro sea A están a la misma distancia de A?¿por qué?

____

____

5) Etiqueta con la letra C al punto que pertenece a ambas circunferencias
6) Si unes los tres puntos A, B, C con segmentos obtienes un Triángulo ¿cuánto miden sus lados?

____

____

7) Si a esta clase de triángulo se le llaman EQUILATEROS ¿cuáles son las propiedades que debe tener un triángulo para que sea equilátero?

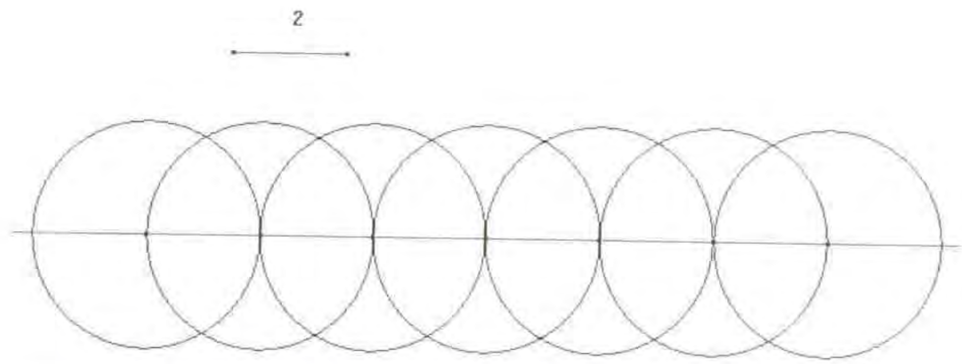
____

____

ACTIVIDAD 1.8

1) Traza un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 4 cm y el ángulo comprendido entre ellos es 40 grados.
2) Los lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo miden 3 y 5 cm. Trázalo

ACTIVIDAD 1.9

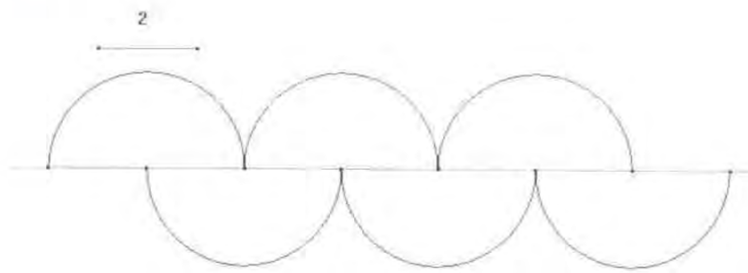


REPRODUCE LA SIGUIENTE FIGURA DE CIRCULOS ENLAZADOS DE RADIO 2

1) Ver el punto 5 de la Lección 1.2 para recordar como se edita una medida

2) Ver el punto 3 de la Lección 1.3 para que recuerdes como se reproduce una medida

ACTIVIDAD 1.9.1

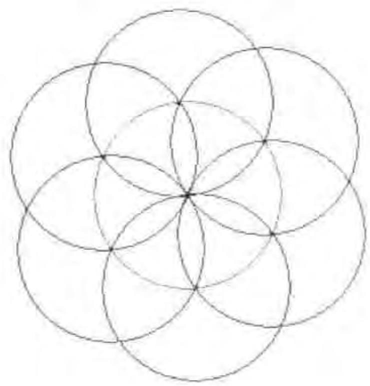


Tomando como base la figura de la actividad 1.5, reproduce la figura que se presenta con semicircunferencias de radio 2

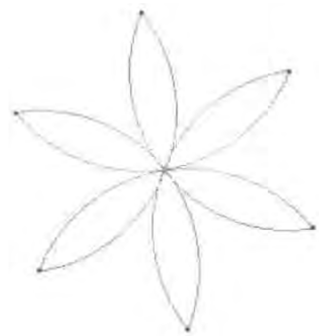
(Ver los puntos 18 y 19 de la Lección 1.1)

ACTIVIDAD 1.9.2

Reproduce la siguiente figura enlazando circunferencias cuyos radios son iguales (empieza por la del centro)



ACTIVIDAD 1.9.3



Reproduce la siguiente figura que se obtiene a partir de la actividad 1.7 (Ver el punto 18 y 19 de la Lección 1.1 para trazar los arcos y ocultar circunferencias)

CAPITULO
I, II, VI, VIII, IX, XVI

CURSO DE GEOMETRIA

F.J. LANDAVERDE

PRIMERA PARTE

GEOMETRIA PLANA

CAPITULO PRIMERO

LINEAS Y ANGULOS

I. LA LINEA — SUS CLASES

5. **Clases de líneas.** — Se distinguen generalmente dos clases de líneas: *líneas rectas* y *líneas curvas.*

6. **Línea recta.** — Un hilo tirante da una idea intuitiva de la línea recta. Suele definirse: *Línea recta es aquella que tiene todos sus puntos en una misma dirección.*

Así, por ejemplo, se comprueba si el borde de una regla es recto, dirigiendo una visual por uno de sus extremos para ver si todos sus puntos quedan ocultos detrás del primero.

Para trazar líneas rectas, se emplea generalmente una regla, una escuadra, o un cordón bien tirante.

7. **Propiedades de la recta.** — 1ª *La recta es el camino más corto entre dos puntos.*

2ª *Por dos puntos sólo puede pasar una recta; es decir, que dos puntos determinan una recta.*

3ª *Por un punto pueden pasar una infinidad de rectas, y en una recta hay una infinidad de puntos.*

4ª *Dos rectas que tienen dos puntos comunes coinciden en toda su extensión.*

5ª *Dos rectas distintas no pueden tener más de un punto común; también pueden no tener ninguno.*

8. Semirrecta y segmento rectilíneo. — Toda recta puede prolongarse por sus dos extremos; por eso su longitud es indefinida; v. gr.: la recta AB (fig. 3).

Si en una recta indefinida se fija un punto, éste divide la recta en dos partes opuestas llamadas *semirrectas;* v. gr.: las semirrectas OD y OC (fig. 3).

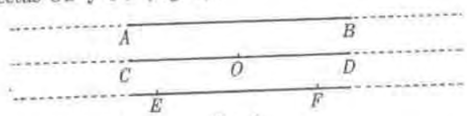


Fig. 3.

El punto O es el origen de las semirrectas, y los sentidos respectivos van de O hacia D y de O hacia C.

A menudo la semirrecta suele llamarse también recta.

Si en una recta indefinida se fijan dos puntos, la parte de recta comprendida entre dichos puntos se denomina *segmento rectilíneo;* v. gr.: el segmento rectilíneo EF (fig. 3).

Los puntos E y F que limitan el segmento son sus extremos. Con frecuencia el segmento rectilíneo se llama simplemente recta.

9. Medida de los segmentos rectilíneos. — Para medir los segmentos rectilíneos se emplean las medidas de longitud y se usa generalmente una regla graduada en decímetros, centímetros y milímetros, que se aplica sobre la recta que se quiere medir, haciendo coincidir el cero con uno de sus extremos; el número que señala el otro extremo es la longitud de la recta. Así, la recta AB de la figura 4 mide 3 cm y 4 mm, o sea, 34 mm.

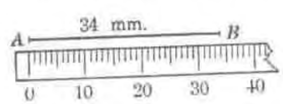


Fig. 4.

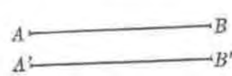


Fig. 5.

También puede emplearse el compás de puntas, con el cual se toma una abertura entre las puntas igual a la longitud de la recta, y se la lleva sobre una regla graduada o sobre un doble decímetro.

Dos segmentos son iguales cuando tienen la misma medida. Los segmentos iguales pueden siempre coincidir por superposición; v. gr.: los segmentos AB y $A'B'$ (fig. 5).

160

10. Operaciones con segmentos rectilíneos. — 1ª Para *sumar* segmentos rectilíneos, se llevan, con un compás, uno a continuación de otro en una misma recta; v. gr.: AE es la suma de AB y CD (fig. 6).

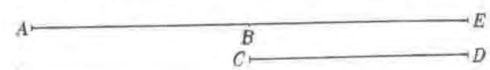


Fig. 6.

2ª Para *restar* un segmento rectilíneo de otro, se aplica la longitud del menor sobre el mayor, de modo que coincidan en uno de sus extremos; la parte sobrante del segmento mayor es la diferencia; v. gr.: AB es la diferencia entre AE y CD (fig. 6).

3ª Para *multiplicar* un segmento rectilíneo por un número, se suman tantos segmentos iguales al segmento dado como unidades tiene el número; v. gr.: CD es el producto de AB por 4 (fig. 7).

Fig. 7.

4ª Para *dividir* un segmento rectilíneo entre un número, se lo divide en tantas partes iguales como unidades tiene el número; v. gr.: AB es la cuarta parte de CD (fig. 7).

Estas operaciones pueden hacerse *gráficamente*, o bien por medio del *cálculo*, operando con números que representen la medida de los segmentos rectilíneos dados.

11. Aplicaciones. — Los carpinteros y aserradores emplean, para trazar rectas sobre la madera, un cordel bien estirado impregnado de una materia colorante, que se hace vibrar a lo largo de las piezas o troncos que se quieren aserrar.

Los jardineros tienden un cordel entre dos estacas para guiarse en los surcos o plantíos que quieren hacer en línea recta.

Los albañiles se sirven también de un cordel tendido a lo largo de las paredes que construyen para mantener su alineación, y de la plomada para asegurarse que dichas paredes suben verticales.

Los agrimensores determinan alineaciones en terrenos extensos empleando jalones que colocan alineados de trecho en trecho, por medio de visuales dirigidas en la misma dirección.

12. Línea curva. — *Línea curva, o simplemente curva, es la que está generada por un punto que cambia continuamente de dirección;* v. gr.: un hilo que no esté estirado, la línea AG (fig. 8).

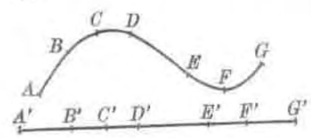


Fig. 8.

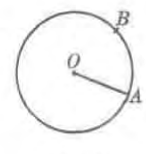


Fig. 9.

Se puede medir aproximadamente la longitud de una línea curva, considerándola como compuesta de una multitud de pequeños segmentos rectilíneos, tales como $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, etc. (fig. 8).

La figura formada por una línea curva *cerrada*, cuyos puntos distan igualmente de un punto interior llamado *centro*, se denomina *circunferencia* (fig. 9).

Radio es toda recta que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia; v. gr.: el radio OA (fig. 9).

Arco es una parte limitada de la circunferencia; v. gr.: el arco AB (fig. 9).

Fig. 10.

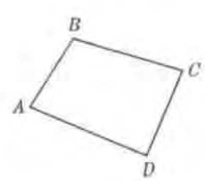


Fig. 11.

13. Línea quebrada o poligonal. — *La línea compuesta de varios segmentos rectos que siguen diferentes direcciones se llama línea quebrada o poligonal;* v. gr.: el metro plegable abierto pero ... línea $ABCDE$ (fig. 10).

161

La medida de una línea quebrada es igual a la suma de sus segmentos. Así, la medida de la línea $ABCDE$ es igual a

$$AB + BC + CD + DE.$$

La figura formada por una línea poligonal *cerrada* se llama *polígono* (fig. 11).

Nota. — Las líneas que están compuestas de partes rectas y de partes curvas se llaman *líneas mixtas*.

II. ANGULOS

14. Definiciones. — *Llámase* **ángulo** *la abertura comprendida entre dos rectas trazadas desde un mismo punto.* Estas rectas se llaman *lados* del ángulo y el punto común, *vértice* (fig. 12).

Generalmente se designa un ángulo con tres letras mayúsculas, la del vértice colocada en medio. Si el ángulo es único, basta la letra del vértice. También puede usarse una cifra o una letra minúscula, colocada en el interior del ángulo; v. gr.: el ángulo A o BAC (fig. 12).

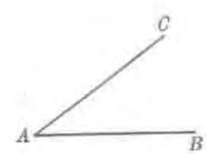


Fig. 12.

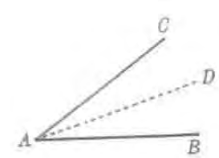


Fig. 13.

Con frecuencia, para abreviar, se sustituye la palabra ángulo por el símbolo $\angle$.

La recta que, partiendo del vértice, divide un ángulo en dos partes iguales, se llama **bisectriz** del ángulo; v. gr.: la bisectriz AD (fig. 13).

La magnitud de un ángulo no depende de la *longitud* de sus lados, sino de la *abertura* o *separación* que hay entre ellos. Así, los ángulos formados por las agujas de relojes de diferentes tamaños son iguales si los relojes señalan la misma hora (fig. 14).

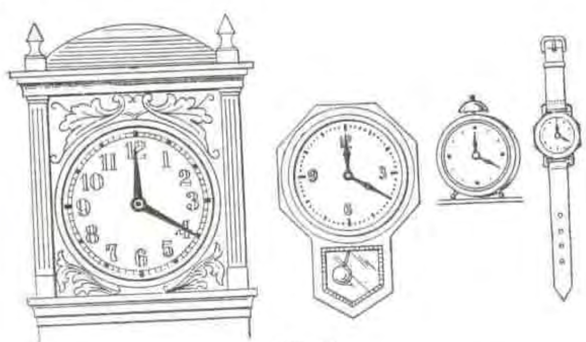


Fig. 14.

15. Rectas perpendiculares. — Si dos rectas AB y CD (figura 15) al cortarse forman *cuatro ángulos iguales*, se dice que son **perpendiculares** y los ángulos formados se llaman *rectos*. Así, en esta figura, AB es perpendicular a CD y viceversa, y se tiene:

$$\angle AOC = \angle COB = \angle BOD = \angle DOA = \angle \text{ recto.}$$

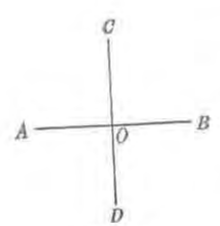


Fig. 15.

Se puede comprobar prácticamente esta igualdad doblando una hoja de papel dos veces sobre sí misma de manera que sus bordes coincidan. Al desplegarla, los dobleces forman cuatro ángulos iguales, puesto que coincidían cuando la hoja estaba doblada.

A menudo se emplea el signo $\perp$ en vez de la palabra perpendicular.

Nota. — Cuando las rectas que se cortan no son perpendiculares, se dice que son *oblicuas*.

16. Generación de los ángulos. — Un ángulo puede considerarse generado por dos rectas, de las cuales una permanece fija y la otra gira alrededor de un punto fijo de la primera. En efecto, si en la figura 16 se supone que las dos rectas OA y OB coinciden, el ángulo es nulo. Al moverse la recta OB alrededor del punto O *en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj*,

permaneciendo fija la recta OA, el ángulo es sucesivamente menor que un recto, igual a un recto o un cuarto de vuelta, menor que dos rectos, igual a dos rectos o media vuelta, menor que tres rectos, igual a tres rectos o tres cuartos de vuelta, menor que cuatro rectos, y por fin, igual a cuatro rectos o una vuelta, cuando la recta móvil vuelve a coincidir con la recta fija.

Se admite además que si el lado móvil continúa girando, se forman ángulos mayores que cuatro rectos, y que si gira *en el mismo sentido que las agujas de un reloj*, los ángulos son negativos. Ambas clases de ángulos tienen aplicación principalmente en *trigonometría*.

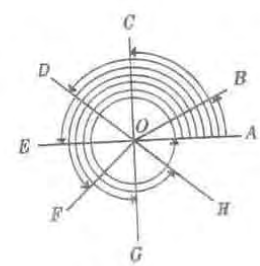


Fig. 16.

17. Clases de ángulos. — *Angulo recto* es, como se acaba de ver, el que tiene sus lados perpendiculares; v. gr.: el $\angle BOC$ (fig. 15).

Angulo agudo es el que es menor que un recto, o menor que un cuarto de vuelta; v. gr.: el $\angle AOB$ (fig. 16).

Angulo obtuso es el que es mayor que un recto, o mayor que un cuarto de vuelta; v. gr.: el $\angle AOD$ (fig. 16).

Angulo colineal, es el que vale dos rectos, o una media vuelta; sus lados son prolongación uno de otro; v. gr.: el $\angle AOE$ (fig. 16).

Angulo de una vuelta es el que vale cuatro rectos, y sus lados coinciden.

Angulos adyacentes son dos ángulos que tienen el mismo vértice, un lado común y los otros dos, situados a una y otra parte del lado común; v. gr.: los $\measuredangle\, AOB$ y BOC (fig. 17).

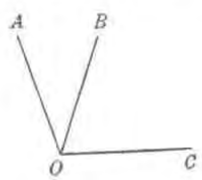


Fig. 17.

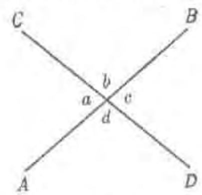


Fig. 18.

Angulos opuestos por el vértice son aquellos que tienen el vértice común y los lados del uno son prolongación de los del otro; v. gr.: los $\measuredangle\, a$ y c, b y d (fig. 18).

Angulos complementarios son dos ángulos cuya suma es igual a un recto; v. gr.: los $\measuredangle\, a$ y b (fig. 19).

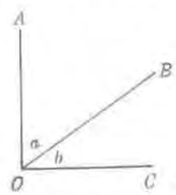


Fig. 19.

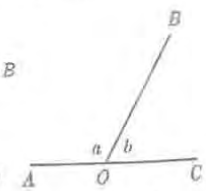


Fig. 20.

Angulos suplementarios son dos ángulos cuya suma es igual a dos rectos; v. gr.: los $\measuredangle\, a$ y b (fig. 20).

18. **Medida de los ángulos.** — Para medir los ángulos se toma como unidad el *grado*, que es igual a $\frac{1}{360}$ del ángulo de una vuelta, o sea, $\frac{1}{90}$ del ángulo recto.

El grado se divide en 60 *minutos* y el minuto, en 60 *segundos*.

Los grados se indican con un pequeño cero, los minutos, con un pequeño acento y los segundos, con dos, como en el ejemplo siguiente: El ángulo de 52 grados 38 minutos 45 segundos se escribe $52^\circ\ 38'\ 45''$.

Generalmente se miden los ángulos con el *transportador*, que es un semicírculo con doble graduación de 0° a 180° (fig. 21).

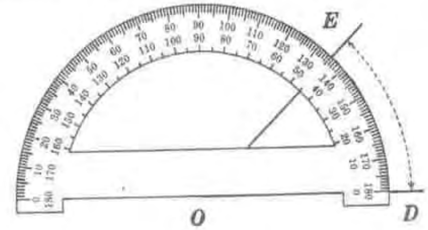


Fig. 21.

Para ello, se coloca el centro del transportador en el vértice del ángulo, de manera que su diámetro coincida con uno de los lados. El número de grados señalado por el otro lado indica la medida del ángulo; v. gr.: el $\angle DOE = 45^\circ$ (fig. 21).

Según lo que antecede, el ángulo recto $= 90^\circ$, el ángulo de lados colineales $= 180^\circ$, el ángulo de una vuelta $= 360^\circ$.

Dos ángulos son iguales cuando tienen la misma medida. Los ángulos iguales pueden siempre coincidir por superposición.

19. **Propiedades de los ángulos.** — 1ª *Los ángulos que tienen el mismo complemento son iguales*, porque les falta el mismo ángulo para valer un recto.

2ª *Los ángulos que tienen el mismo suplemento son iguales*, porque les falta el mismo ángulo para valer dos rectos.

3ª *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales*, porque tienen el mismo suplemento.

4ª *Los ángulos adyacentes de lados exteriores colineales son suplementarios*, porque juntos valen dos ángulos rectos.

5ª *Todos los ángulos rectos son iguales;* ídem, *los ángulos de lados colineales*, ídem, *los ángulos de una vuelta.*

6ª *La suma de los ángulos consecutivos trazados de un mismo lado de una recta es igual a dos ángulos rectos*, porque juntos forman un ángulo de lados colineales.

163

7ª *La suma de los ángulos consecutivos trazados alrededor de un punto es igual a cuatro ángulos rectos*, porque juntos forman un ángulo de una vuelta.

20. Operaciones con ángulos. — 1ª Para *sumar* dos ángulos se los coloca de manera que sean contiguos, o sea, que tengan el mismo vértice y un lado común; el ángulo formado por los lados exteriores es la suma pedida.

2ª Para *restar* dos ángulos se coloca el menor sobre el mayor de manera que coincidan sus vértices y uno de sus lados; el ángulo sobrante es la diferencia pedida.

3ª Para *multiplicar* un ángulo por un número se suman tantos ángulos iguales al ángulo dado como unidades tiene el número.

4ª Para *dividir* un ángulo entre un número se lo divide en tantas partes iguales como unidades tiene el número (por ejemplo, por medio del transportador).

Estas operaciones pueden hacerse más fácilmente por medio del cálculo, operando con los números que representan la medida de los ángulos.

Nota. — Un medio muy sencillo de obtener un ángulo igual a otro es *calcario* con papel transparente. Así se puede fácilmente comparar unos ángulos con otros y hacer operaciones con ellos.

21. Teorema. — *Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares.*

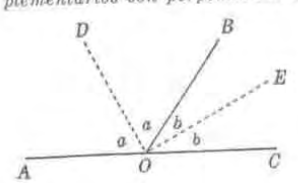


Fig. 22.

Hipótesis: $\angle AOB + \angle BOC = 180°$, OD y OE bisectrices.
Tesis: $OD \perp OE$.

Por hipótesis: $2a + 2b = 2$ rectos.

Dividiendo entre 2: $a + b = 1$ recto.

$\therefore OD \perp OE$. (1)

(1) El símbolo $\therefore$ significa: de donde, por tanto, luego.

164

22. Teorema. — *Las bisectrices de los cuatro ángulos opuestos por el vértice, formados por dos rectas, están en línea recta dos a dos y son perpendiculares entre sí.*

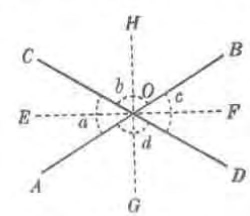


Fig. 23.

Hipót.: $\measuredangle a$ y c, b y d opuestos por el vértice; OE, OF y OH, OG bisectrices.
Tesis: $EF \perp HG$.

Según el teorema anterior, se tiene:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{b+c}{2} = \frac{c+d}{2} = \frac{d+a}{2} = 1 \text{ recto.}$$

Luego, las bisectrices son dos rectas perpendiculares, puesto que forman cuatro ángulos iguales.

$\therefore EF \perp HG$.

23. Teorema. — *Por un punto de una recta, sólo se puede trazar una perpendicular a esta recta.*

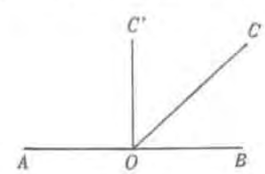


Fig. 24.

Hipót.: O punto de AB.
Tesis: OC' única $\perp$ a AB.

Trácese una oblicua cualquiera OC, y hágasela girar hasta que ocupe una posición OC' tal que resulten iguales los $\measuredangle AOC'$ y $C'OB$, en cuyo caso estos ángulos son rectos. Luego, OC' es perpendicular a AB.

No puede haber otra perpendicular, pues, por poco que la recta OC' gire hacia un lado u otro, los ángulos adyacentes dejan de ser iguales.

24. Teorema. — *Por un punto exterior a una recta, sólo se puede trazar una perpendicular a esta recta.*

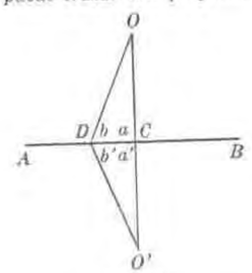


Fig. 25.

Hipót.: O punto exterior a AB.
Tesis: OC única $\perp$ a AB.

Trácese $OC \perp AB$. Cualquiera otra recta, OD por ejemplo, es oblicua.

Para demostrarlo, prolónguese OC hasta O', de modo que $OC = CO'$ y trácese DO'. Dóblese la parte superior de la figura sobre la parte inferior, de modo que COD coincida con $CO'D$.

Se tiene: $\angle a = \angle a' = 90°$, por construcción;

$\angle b = \angle b'$, por coincidir.

Si OD fuera $\perp$ a AB, el $\angle b$ sería recto y su igual b' también, y la línea ODO' tendría que ser recta, lo cual es imposible, porque entre O y O' sólo se puede trazar una recta, que es OO'.

III. CONSTRUCCIONES

25. Trazado de ángulos. — Si se trata de construir un ángulo cualquiera, basta la regla; pero si éste ha de ser igual a un ángulo dado, se debe usar además el *transportador* o el *compás.*

Con el *transportador* mídase primero el ángulo dado; luego, colóquese el centro del transportador en un punto O de una recta indefinida OD (fig. 21), de manera que el diámetro coincida con esta recta, y márquese un punto E junto al número de grados que corresponde a la medida del ángulo dado. Uniendo E con O, se tiene el ángulo pedido.

Nota. — Más adelante se explica la construcción de ángulos por medio del *compás* (Nº 48).

26. Trazado de perpendiculares. — Para trazar una recta perpendicular a otra, es decir, que forme ángulo recto con ella, se aplica una regla a la recta dada, de manera que su borde coincida con ella; luego, se hace deslizar una *escuadra* a lo largo de la regla por uno de sus lados perpendiculares, y se traza una recta por el otro lado perpendicular, en el punto donde convenga; v. gr.: las $\perp$s OP y $O'P'$ a la recta AB (fig. 26).

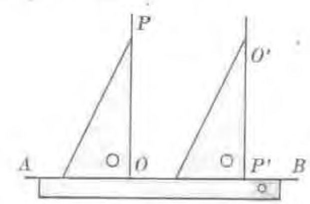


Fig. 26.

Con el *transportador* se pueden también construir ángulos rectos y, por tanto, trazar perpendiculares; v. gr.: la $\perp MN$ a la recta AB (fig. 27).

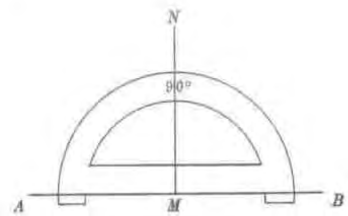


Fig. 27.

Nota. — Más adelante se explica la construcción de rectas perpendiculares por medio del *compás* (Nº 86).

27. Aplicaciones. — Además de la escuadra común en forma de triángulo rectángulo, existen otras de forma apropiada a los usos a que se las destina.

Los carpinteros usan una escuadra de madera formada por dos reglas unidas en ángulo recto. Uno de los brazos es más grueso que el otro, de manera que la parte saliente permite deslizar la escuadra a lo largo de las piezas de madera y facilita el trazado de perpendiculares en diferentes lugares.

Los canteros emplean una escuadra de metal de la misma forma que la de los carpinteros, pero las dos ramas son más delgadas y tienen el mismo espesor. La usan para labrar en ángulo recto las aristas de las piedras.

EJERCICIO PRIMERO

1. Dar ejemplos de cosas pequeñas que pueden considerarse como puntos.

2. ¿Cuántos puntos bastan para determinar una recta?

3. ¿Cuántas rectas pueden pasar por un punto?

4. ¿Cuántas rectas pueden determinar tres puntos unidos de dos en dos?

5. ¿Cómo puede comprobarse si el borde de una regla es recto?

6. Trazar un segmento rectilíneo de 5.7 cm, otro de 28 mm; otros dos, iguales respectivamente a la suma y a la diferencia de los dos primeros.

7. Trazar dos segmentos iguales respectivamente al tercio del mayor y al triple del menor de los dos primeros segmentos del problema anterior.

8. Dividir a ojo, en 3 y 6 partes iguales, un segmento rectilíneo y comprobar después por medio del compás; rectificar si es preciso.

9. Trazar una recta AB de 7.2 cm; prolongarla desde A hacia la izquierda en un cuarto de AB, y desde B hacia la derecha en un sexto de la misma; ¿cuál es la longitud de la nueva recta?

10. Una barra de hierro mide 9 m de longitud a la temperatura de 12°; ¿cuál será su longitud a la temperatura de 37°, si por cada metro y por cada grado aumenta en .014 mm?

11. En una recta se señalan cuatro puntos consecutivos A, B, C, D, tales que AB sea igual a CD; probar que AC es igual a BD (fig. 28).

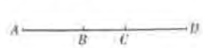


Fig. 28.

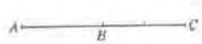


Fig. 29.

166

12. En una recta se toman tres puntos consecutivos A, B, C, y se señala el punto M, medio de BC; demostrar que $AM = \frac{AB + AC}{2}$ (fig. 29).

13. Dar ejemplos de las diferentes clases de ángulos definidos en este capítulo.

14. Expresar el número de grados de los ángulos formados por las agujas de un reloj a las 2, a las 5, a las 6.

15. ¿Qué complemento y suplemento tienen los ángulos de 23°, 57°, 68° 16′ 39″? Hacer la construcción correspondiente al ángulo de 57° con el transportador.

16. Hallar dos ángulos complementarios tales que el uno sea cuádruple del otro; ídem, dos ángulos suplementarios que difieran en 15°.

17. Con el transportador, construir un ángulo igual a otro dado; ídem, un ángulo recto.

18. La Tierra da una vuelta alrededor de su eje en 24 horas; ¿cuántos grados describe en 3 horas?

19. Si el ángulo a mide 36°, ¿cuántos grados tiene cada uno de los cuatro ángulos a, b, c, d? (fig. 30).

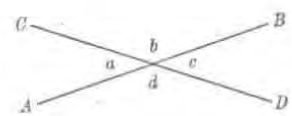


Fig. 30.

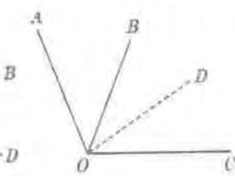


Fig. 31.

20. Si en la misma figura del problema anterior, se supone que b es igual a $3a$, ¿cuántos grados tiene cada uno de los cuatro ángulos a, b, c, d?

21. Dados dos ángulos adyacentes AOB y BOC, y la bisectriz OD del ángulo BOC (fig. 31), probar que $2AOD = AOB + AOC$.

22. Probar que si el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos adyacentes es menor que un recto, los lados exteriores no están en línea recta.

23. ¿Cuánto mide el ángulo que describe el minutero de un reloj en 20 minutos? ¿y el horario?

24. Construir dos ángulos adyacentes complementarios y calcular el valor del ángulo formado por sus bisectrices.

25. ¿Cuánto mide un ángulo que es doble de su complemento? ¿y el que es mitad de su suplemento?

26. Alrededor de un punto O, trazar tres rectas OA, OB y OC que formen tres ángulos iguales; ¿cuántos grados mide cada uno de ellos?

27. Si en la figura del problema anterior se prolonga OA más allá de O, probar que la prolongación OD es bisectriz del ángulo BOC.

28. Alrededor de un punto O se trazan las rectas OA, OB, OC, OD y OE, que forman ángulos iguales entre sí. 1º Señalar dos ángulos iguales al doble de AOB. 2º ¿De qué ángulos son bisectrices las rectas OA y OD?

167

CAPITULO II

POLIGONOS — TRIANGULOS

I. DEFINICIONES

28. **Polígonos.** — *Llámase* **polígono** *una figura plana limitada por rectas que forman una línea quebrada cerrada* (figs. 32 a 40).

En un polígono hay que considerar los *lados*, los *ángulos*, los *vértices*, las *diagonales* y el *perímetro*.

Lados son las rectas que limitan el polígono.

Angulos son los formados por dos lados consecutivos en el interior del polígono.

Angulos exteriores son los formados por un lado cualquiera y la prolongación del lado adyacente; v. gr.: el $\angle a$ (fig. 33).

Cada ángulo exterior es suplemento del ángulo interior adyacente.

Vértices son los de los ángulos del polígono.

Diagonales son las rectas que unen dos vértices no consecutivos; v. gr.: la diagonal EC (fig. 32).

Perímetro es la suma de los lados.

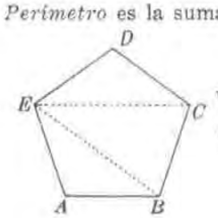


Fig. 32.

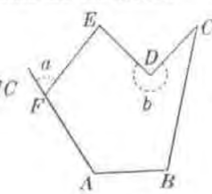


Fig. 33.

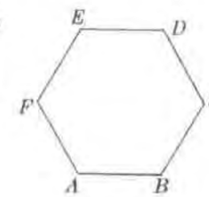


Fig. 34.

29. **Clases de polígonos.** — Atendiendo al número de lados o ángulos, los polígonos se clasifican en *triángulos*, *cuadriláteros*, *pentágonos*, *hexágonos*, *heptágonos*, *octágonos*, *eneágonos*, *decágonos*, *endecágonos*, *dodecágonos*, *pentedecágonos*, según tengan 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15 lados.

Los demás polígonos no tienen nombre particular; así se dice polígono de 13 lados, polígono de 20 lados, etc.

Polígono convexo es el que tiene todos sus ángulos menores que 180° (figs. 32 y 34).

Polígono cóncavo es el que tiene uno o varios ángulos mayores que 180°; v. gr.: el polígono de la figura 33 que tiene el ángulo *b* mayor que 180°.

Polígono equilátero es el que tiene todos sus lados iguales.

Polígono equiángulo es el que tiene todos sus ángulos iguales.

Polígono regular es el que es a la vez equilátero y equiángulo (fig. 34).

30. Triángulo. — *Llámase* **triángulo** *un polígono de tres lados* (figs. 35 a 40).

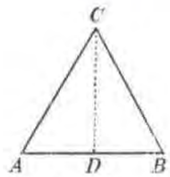


Fig. 35.

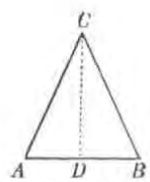


Fig. 36.

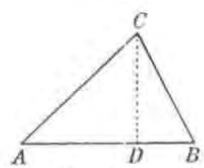


Fig. 37.

Se designan generalmente los ángulos de un triángulo por letras mayúsculas, A, B, C, por ejemplo, y los lados opuestos a estos ángulos, por las mismas letras minúsculas, a, b, c.

Con frecuencia se sustituye la palabra triángulo por el símbolo $\triangle$.

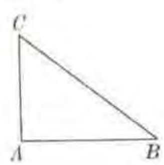


Fig. 38.

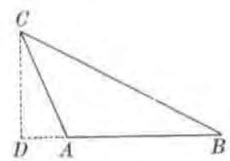


Fig. 39.

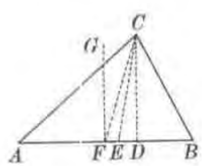


Fig. 40.

Base de un triángulo es el lado sobre el cual parece descansar; y *altura* es la perpendicular a la base o a su prolongación, trazada desde el vértice opuesto; v. gr.: las bases AB y las alturas CD (figs. 35 a 40).

168

Se puede tomar como base de un triángulo cualquiera de sus lados, y a cada base corresponde una altura distinta.

Mediana es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto; v. gr.: la mediana CF (fig. 40).

Mediatriz es la perpendicular trazada en el punto medio de un lado; v. gr.: la mediatriz FG (fig. 40).

La mediatriz se llama también *perpendicular bisectriz*.

Bisectriz es la de cualquiera de los ángulos del triángulo; v. gr.: la bisectriz CE (fig. 40).

Todo triángulo tiene tres alturas, tres medianas, tres mediatrices y tres bisectrices.

Las alturas, medianas y mediatrices se refieren a los lados, mientras que las bisectrices corresponden a los ángulos.

31. Clases de triángulos. — Con relación a los lados, los triángulos se clasifican en *equiláteros, isósceles* y *escalenos*.

Triángulo equilátero es el que tiene los tres lados iguales (fig. 35).

Triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales (fig. 36).

Triángulo escaleno es el que tiene los tres lados desiguales (fig. 37).

Con relación a los ángulos, los triángulos se clasifican en *acutángulos, rectángulos* y *obtusángulos*.

Triángulo acutángulo es el que tiene los tres ángulos agudos (**figs. 35 a 37**).

Triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto (fig. 38).

Triángulo obtusángulo es el que tiene un ángulo obtuso (figura 39).

Los triángulos acutángulos y obtusángulos se llaman también *triángulos oblicuángulos*.

En todo triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*, y los otros dos, *catetos*; v. gr.: la hipotenusa BC y los catetos AB y AC (fig. 38).

En el triángulo isósceles, se suele tomar como base el lado que no tiene igual, y en el triángulo rectángulo, la hipotenusa.

¿En qué triángulos el pie de la altura está en el punto medio de la base?

¿En qué triángulos el pie de la altura está en un extremo de la base?

¿En qué triángulos el pie de la altura está en la prolongación de la base?

II. PROPIEDADES DE LOS TRIANGULOS

32. **Igualdad de los triángulos.** — *Dos triángulos son iguales cuando se los puede hacer coincidir en todas sus partes por superposición.*

Hay tres casos principales de igualdad de triángulos.

33. **Primer caso.** — *Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado y los ángulos adyacentes respectivamente iguales, a un lado y a los dos ángulos adyacentes de otro triángulo.*

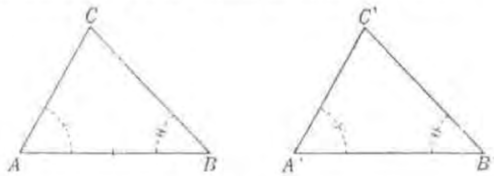


Fig. 41.

Hipót.:	$AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$.
Tesis:	$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Cálquese el $\triangle A'B'C'$ y colóquese el calco sobre el $\triangle ABC$, de modo que los elementos iguales coincidan. Se tiene:

AB coincide con $A'B'$, por ser lados iguales;
$\angle A$ coincide con $\angle A'$, por ser ángulos iguales;
$\angle B$ coincide con $\angle B'$, por ser ángulos iguales.

Luego, $A'C'$ y $B'C'$ toman respectivamente la dirección de AC y BC, y los puntos C y C' coinciden, porque dos rectas que se cortan no pueden tener más de un punto común.

$$\therefore \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

34. **Corolarios.** — 1º *Si un triángulo tiene dos ángulos iguales es isósceles.*

Efectivamente, si un $\triangle ABC$ tiene los $\measuredangle A$ y B iguales, puede coincidir consigo mismo en posición invertida, es decir, que AB coincida con BA, y los $\measuredangle A$ y B, con los $\measuredangle B$ y A respectivamente. Luego, los lados AC y BC son iguales y el triángulo es isósceles.

2º *Todo triángulo equiángulo es también equilátero.*

Esto se deduce de lo explicado en el corolario anterior.

169

35. **Segundo caso.** — *Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados y el ángulo que forman respectivamente iguales.*

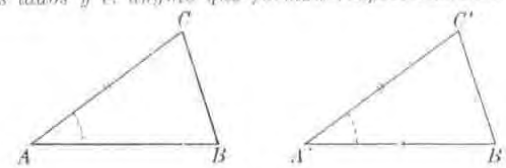


Fig. 42.

Hipót.:	$AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$.
Tesis:	$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Cálquese el $\triangle A'B'C'$ y colóquese el calco sobre el $\triangle ABC$, de modo que los elementos iguales coincidan. Resulta:

$\angle A$ coincide con $\angle A'$, por ser ángulos iguales;
AB coincide con $A'B'$, por ser lados iguales;
AC coincide con $A'C'$, por ser lados iguales.

Luego, los puntos B' y C' caen respectivamente en B y C, y los lados BC y $B'C'$ coinciden, porque entre dos puntos no se puede trazar más de una recta.

$$\therefore \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

36. **Corolarios.** — 1º *Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen los dos catetos respectivamente iguales.*

2º *En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.*

Sea el $\triangle$ isósceles ABC en que se tiene $AC = BC$ (fig. 43).

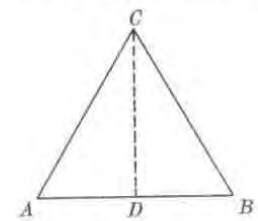


Fig. 43.

Trácese la bisectriz CD. Los $\triangle ADC$ y BDC son iguales, por tener un ángulo igual en C, comprendido entre lados respectivamente iguales. Luego, los $\measuredangle A$ y B son iguales.

3º *Todo triángulo equilátero es también equiángulo.*
Esto es consecuencia del corolario anterior.

37. **Tercer caso.** — *Dos triángulos son iguales cuando los tres lados del uno son respectivamente iguales a los tres lados del otro.*

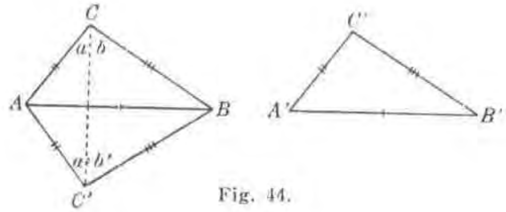


Fig. 44.

Hipót.:	$AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$.
Tesis:	$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Cálquese el $\triangle A'B'C'$ y colóquese el calco debajo del $\triangle ABC$, de modo que AB y $A'B'$ coincidan y que C' caiga en la región opuesta a C. Trácese además CC'.

$AC = AC'$, por hipótesis;
$BC = BC'$, por hipótesis.

Luego; los $\triangle CC'A$ y $CC'B$ son isósceles, y se tiene:

$$a = a' \text{ y } b = b'.$$

Sumando: $$a + b = a' + b'.$$

Luego, el $\angle C = \angle C'$, y los $\triangle ABC$ y $A'B'C'$ tienen un ángulo igual, comprendido entre lados respectivamente iguales.

$$\therefore \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

38. **Teorema.** — *En todo triángulo un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.*

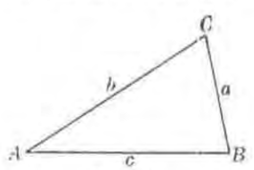


Fig. 45.

Hipót.:	$\triangle ABC$, b lado mayor.
Tesis:	$b + c > a > b - c$.

La recta es el camino más corto entre dos puntos; luego:

$$a < b + c; \qquad (^1)$$
$$b < a + c;$$
$$c < a + b.$$

Réstese c de ambos miembros en la segunda desigualdad:

$$b - c < a;$$

o sea: $$a > b - c. \qquad (^2)$$

Por tanto, según $(^1)$ y $(^2)$:

$$b + c > a > b - c.$$

La misma propiedad se podría demostrar para b y c, y se tendría:

$$c + a > b > c - a;$$
$$b + a > c > b - a.$$

39. **Corolario.** — *La condición para que tres rectas puedan formar un triángulo es que cualquiera de ellas sea menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.*

40. **Teorema.** — *Toda línea poligonal convexa es menor que cualquiera línea envolvente que termine en sus extremos.*

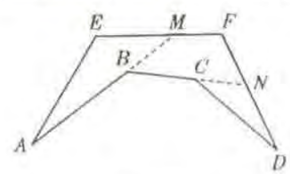


Fig. 46.

Hipót.:	$ABCD$ línea envuelta,
	$AEFD$ línea envolvente.
Tesis:	$ABCD < AEFD$.

Prolónguense AB y BC hasta M y N respectivamente.

La recta es el camino más corto entre dos puntos; luego:

$$AB + BM < AE + EM;$$
$$BC + CN < BM + MF + FN;$$
$$CD < CN + ND.$$

Súmese ordenadamente y suprímanse los términos comunes:

$$AB+BM+BC+CN+CD < AE+EM+BM+MF+FN+CN+ND;$$
$$AB + BC + CD < AE + EM + MF + FN + ND.$$
$$\therefore ABCD < AEFD.$$

41. Corolario. — *La suma de las distancias de un punto situado en el interior de un triángulo a los extremos de uno de sus lados es menor que la suma de los otros dos lados* (fig. 47).

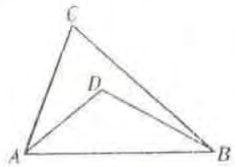


Fig. 47.

Efectivamente, del teorema anterior se deduce:

$$AD + DB < AC + CB.$$

42. Teorema. — *Si dos ángulos de un triángulo son desiguales, al mayor ángulo se opone el mayor lado.*

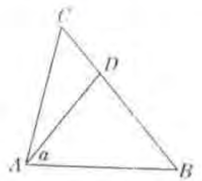


Fig. 48.

Hipót.:	$\angle A > \angle B$.
Tesis:	$BC > AC$.

Constrúyase en A un $\angle a = \angle B$. Se tiene:

$AD = BD$, por ser isósceles el $\triangle ABD$;
$AD + DC > AC$, por ser AC línea recta;
$BD + DC > AC$, por ser $AD = BD$.
$\therefore BC > AC$, por ser $BC = BD + DC$.

43. Recíproco. — *Si dos lados de un triángulo son desiguales, al mayor lado se opone el mayor ángulo* (fig. 48).

Hipót.:	$BC > AC$.
Tesis:	$\angle A > \angle B$.

Según el teorema directo, el $\angle A$ no puede ser menor que el $\angle B$, porque el lado BC resultaría menor que AC, lo cual es contrario a la hipótesis. Tampoco puede serle igual, porque el $\triangle ABC$ sería isósceles, lo cual es también contrario a la hipótesis.

$$\therefore \angle A > \angle B.$$

171

44. Teorema. — *Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales, y los ángulos comprendidos entre ellos, desiguales, los terceros lados son desiguales, y al mayor ángulo se opone el mayor lado.*

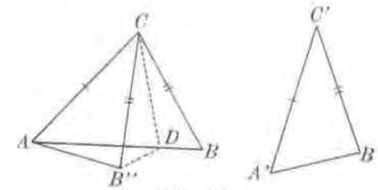


Fig. 49.

Hipót.:	$AC = A'C'$,
	$BC = B'C'$,
	$\angle C > \angle C'$.
Tesis:	$AB > A'B'$.

Cálquese el $\triangle A'B'C'$ y colóquese el calco sobre el $\triangle ABC$, de modo que los lados iguales AC y $A'C'$ coincidan y B' caiga en B''. Trácense además la bisectriz CD del $\angle B''CB$ y la recta $B''D$.

Se tiene: $\angle B''CD = \angle BCD$, por la bisectriz CD;
$B''C = BC$, por ser ambos iguales a $B'C'$.
$\therefore \triangle B''CD = \triangle BCD$,

por tener un ángulo igual entre lados respectivamente iguales.

$$\therefore B''D = BD.$$

De la figura 49 se deducen las desigualdades siguientes:

$AD + DB'' > AB''$, por ser AB'' línea recta;
$AD + DB > AB''$, por ser $DB'' = DB$.
$\therefore AB > A'B'$, por ser $AB'' = A'B'$.

45. Recíproco. — *Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales, y los terceros lados, desiguales, los ángulos opuestos* ***a estos lados son desiguales***, *y al mayor lado se opone el mayor ángulo* (fig. 49).

Hipót.:	$AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $AB > A'B'$.
Tesis:	$\angle C > \angle C'$.

Según el teorema directo el $\angle C$ no puede ser menor que el C', porque el lado AB resultaría menor que $A'B'$, lo cual es contrario a la hipótesis. Tampoco puede serle igual, porque los $\triangle ABC$ y $A'B'C'$ serían iguales, lo cual es también contrario a la hipótesis.

$$\therefore \angle C > \angle C'.$$

46. Teorema. — *En todo triángulo isósceles la bisectriz del ángulo formado por los lados iguales es perpendicular al tercer lado en su punto medio; es decir, que es a la vez bisectriz, altura, mediana y mediatriz.*

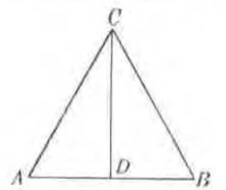


Fig. 50.

Hipót.: $AC = BC$, CD bisectriz.
Tesis: $CD \perp AB$, $AD = DB$.

Según el enunciado, se tiene:

$$AC = BC, \quad \text{por hipótesis;}$$
$$\angle ACD = \angle BCD, \quad \text{por la bisectriz } CD.$$
$$\therefore \triangle ADC = \triangle BDC,$$

por tener un ángulo igual entre lados respectivamente iguales.

$$\therefore AD = DB.$$

Por otra parte, los ángulos iguales ADC y BDC tienen sus lados exteriores en línea recta; luego, son rectos.

$$\therefore CD \perp AB.$$

47. Corolario. — *En todo triángulo equilátero se verifica la misma propiedad para las tres bisectrices, las tres alturas, las tres medianas y las tres mediatrices.*

III. CONSTRUCCIONES

48. Trazado de ángulos con el compás. — Para construir con el compás un ángulo igual a un ángulo dado BAC (fig. 51),

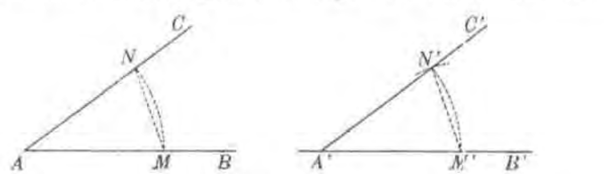


Fig. 51.

se traza, desde el vértice A, un arco cualquiera MN, y en una recta indefinida $A'B'$, haciendo centro en A', se traza otro arco $M'N'$ igual a MN. Uniendo A' con N', se tiene el ángulo pedido.

172

Efectivamente, si se trazan las rectas MN y $M'N'$, se tienen dos triángulos iguales, por tener los tres lados respectivamente iguales. Por tanto, los $\measuredangle A$ y A' son también iguales.

Nota. — La demostración de la igualdad de las rectas MN $M'N'$ se dará más adelante, cuando se pruebe que a arcos iguales corresponden cuerdas iguales. Pero desde luego se puede admitir esta igualdad como cierta, considerando que dichas rectas abarcan partes iguales de circunferencias de igual radio.

49. Construcción de triángulos. — Un triángulo puede construirse siempre que se conozcan tres de sus elementos, de los cuales uno por lo menos sea uno de los lados. A continuación se pone un ejemplo de cada uno de los casos de igualdad explicados.

1º *Construir un triángulo, dados un lado y los ángulos adyacentes* (fig. 52).

Se traza una recta BC igual al lado a; en sus dos extremos se construyen ángulos respectivamente iguales a los $\measuredangle B$ y C, y se prolongan sus lados hasta que se corten.

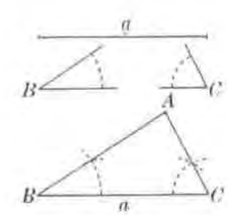


Fig. 52.

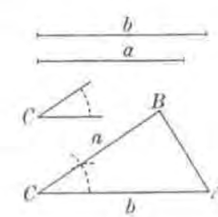


Fig. 53.

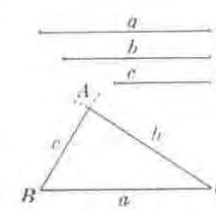


Fig. 54.

2º *Construir un triángulo, conocidos dos lados y el ángulo formado por ellos* (fig. 53).

Se traza un ángulo igual al $\angle C$, y desde el vértice se llevan **sobre sus lados las longitudes dadas** a y b. Uniendo los extremos A y B, se tiene el triángulo pedido.

3º *Construir un triángulo, dados sus tres lados* (fig. 54).

Se traza una recta BC igual al lado a; desde sus extremos, y con radios respectivamente iguales a los otros dos lados, se trazan dos arcos que, al cortarse, determinan el tercer vértice. Uniendo éste a los otros dos, se tiene el triángulo pedido.

50. Trazado de la bisectriz de un ángulo. — Sea el $\angle BAC$ (fig. 55). Haciendo centro en el vértice del ángulo y con un radio cualquiera, se describe un arco que corte los dos lados en M y N. Desde los puntos M y N como centros, se describen arcos de igual radio que, al cortarse, determinan el punto O. Uniendo este punto con el vértice, se tiene la bisectriz pedida.

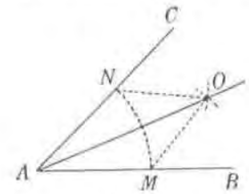


Fig. 55.

Efectivamente, si se trazan las rectas MO y NO, resultan dos triángulos iguales, por tener los tres lados respectivamente iguales. Luego, los $\measuredangle BAO$ y CAO son también iguales.

Haciendo la misma construcción con cada mitad del ángulo se dividiría dicho ángulo en 4 partes iguales, y así sucesivamente para 8, 16, etc. partes iguales.

51. Aplicaciones. — El triángulo tiene multitud de aplicaciones en arquitectura e ingeniería por su *rigidez*, o sea, por la propiedad que tiene de ser *indeformable*. Por esto se utiliza mucho en la construcción de puentes metálicos, de aviones, de armaduras de tejados y de edificios, etc., que se construyen con piezas ensambladas de tal modo que formen una combinación de

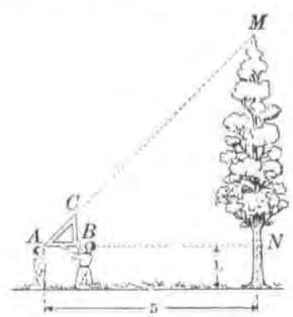


Fig. 56.

173

triángulos cuyo conjunto constituye una estructura completamente rígida.

Por medio de una escuadra isósceles se puede apreciar aproximadamente la altura de un árbol, de una torre, etc., colocando la escuadra de modo que uno de los catetos sea horizontal y que una visual dirigida por la hipotenusa pase por la cúspide del objeto cuya altura se quiere averiguar. Basta entonces medir la distancia del observador al objeto observado y añadirle la altura del observador, desde el suelo hasta los ojos.

Efectivamente, en la figura 56 se ve que:

$$MN = AN = 5 \text{ m.}$$

Luego: $$\text{Altura} = 5 + 1 = 6 \text{ m.}$$

EJERCICIO II

1. ¿Cuántos lados, ángulos y diagonales tiene el dodecágono? ¿y el pentedecágono?

2. ¿Puede haber diagonales en un triángulo? ¿por qué?

3. Trazar a pulso un triángulo de cada una de las diferentes clases de triángulos.

4. Probar que las bisectrices de los ángulos iguales de un triángulo isósceles son iguales.

5. Probar que dos triángulos isósceles son iguales si tienen respectivamente iguales los ángulos en el vértice y las alturas correspondientes a las bases.

6. Dígase con cuáles de los siguientes grupos de segmentos rectilíneos se pueden formar triángulos: 4, 5 y 6 cm; 2, 4 y 7 cm; 9, 3 y 5 cm; 1.8, 2.4 y 3.2 cm.

7. Construir un triángulo isósceles cuyo perímetro mide 15 cm y la base 4 cm.

8. Probar que si un triángulo tiene una altura que sea al mismo tiempo bisectriz, dicho triángulo es isósceles.

9. Probar que la suma de dos rectas que se cortan es mayor que la suma de las rectas que unen sus extremos.

10. Para determinar la distancia entre dos puntos A y B (fig. 57), separados por un obstáculo inaccesible, se han medido distancias iguales $AO = OA'$, $BO = OB'$, y además $A'B'$; probar que la distancia AB es igual a $A'B'$.

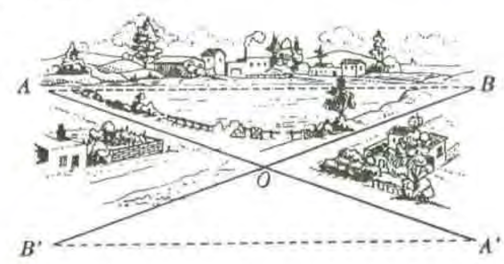


Fig. 57.

11. Si desde un punto interior de un triángulo se trazan rectas a los vértices, la suma de estas rectas es menor que el perímetro y mayor que el semiperímetro. Probarlo.

12. Dados dos triángulos iguales ABC y $A'B'C'$, demostrar que las medianas AD, $A'D'$ y las bisectrices AE, $A'E'$, trazadas desde los vértices A y A' son respectivamente iguales.

13. Construir un triángulo cuyos lados midan respectivamente 7.5, 6 y 4.5 cm, y medir el ángulo opuesto al lado mayor.

14. Construir el triángulo ABC con los siguientes datos: $a = 4.8$ cm, $B = 61°$, $C = 52°$.

15. Construir un triángulo isósceles conociendo la base y un ángulo.

16. Por medio del compás, dividir un ángulo recto en 4 partes iguales.

17. Dados dos puntos A y B, situados a un mismo lado de una recta MN, hallar en esta recta un punto O tal que los ángulos AOM y BON sean iguales.

18. Demostrar que en todo triángulo isósceles las medianas correspondientes a los lados iguales son iguales.

19. Construir un triángulo ABC, conocidos dos lados AB y BC, y la mediana AD.

174

20. Dado el triángulo ABC en que los ángulos A y B son iguales (fig. 58), se trazan desde O, punto medio de la base AB, dos rectas que formen con ella dos ángulos iguales y que corten los otros dos lados en D y E; demostrar que $OD = OE$.

21. En un triángulo ABC (fig. 59) se traza la mediana BD, que se prolonga en una longitud DE igual a BD, y se une E con A. Demostrar que AE es igual a BC.

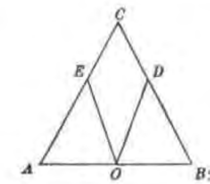


Fig. 58.

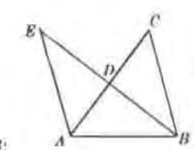


Fig. 59.

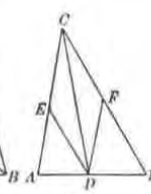


Fig. 60.

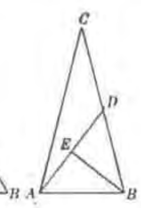


Fig. 61.

22. Se traza la bisectriz CD en un triángulo ABC (fig. 60) y se toman sobre los lados CA y CB longitudes CE y CF iguales. Demostrar que CD es bisectriz del ángulo EDF y que DE es igual a DF.

23. En un triángulo ABC (fig. 61), cuyos lados están en la siguiente relación: $AC = BC = 2AB$, se trazan la mediana AD, y la bisectriz BE del ángulo ABD; ¿qué clase de triángulo es ABD y qué propiedades tiene BE?

CAPITULO VI

CUADRILATEROS

I. GENERALIDADES

104. Definiciones. — *Llámase* **cuadrilátero** *todo polígono de cuatro lados* (figs. 118 a 126).

Paralelogramo es el cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos (figs. 118 a 121).

Generalmente el lado mayor se llama *base*, y la perpendicular a la base, trazada desde el lado opuesto, se denomina *altura*.

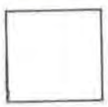


Fig. 118.

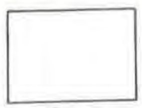


Fig. 119.

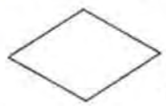


Fig. 120.

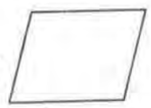


Fig. 121.

Cuadrado es el paralelogramo que tiene los lados iguales y los ángulos rectos (fig. 118).

Rectángulo es el paralelogramo que tiene los lados contiguos desiguales y los ángulos rectos (fig. 119).

Rombo es el paralelogramo que tiene los lados iguales y los ángulos oblicuos (fig. 120).

Romboide es el paralelogramo que tiene los lados contiguos desiguales y los ángulos oblicuos (fig. 121).

Las palabras paralelogramo y rectángulo se sustituyen a menudo por los símbolos ▱ y ▭.

175

Trapecio es el cuadrilátero que tan sólo tiene dos lados paralelos (figs. 122 a 124).

Estos lados paralelos se llaman *bases*, y la perpendicular trazada desde la base menor a la base mayor, se denomina *altura*.

Base media de un trapecio es la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos; v. gr.: la base media MN (fig. 122).

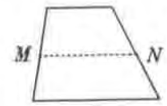


Fig. 122.

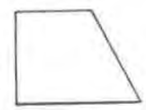


Fig. 123.

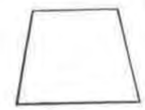


Fig. 124.

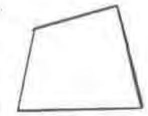


Fig. 125.

Trapecio rectángulo es el que tiene dos ángulos rectos (figura 123).

Trapecio isósceles es el que tiene iguales los lados no paralelos (fig. 124).

Trapezoide es el cuadrilátero que no tiene ningún lado paralelo a su opuesto (fig. 125).

105. Teorema. — *La suma de los ángulos de un cuadrilátero es igual a cuatro rectos.*

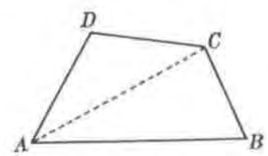


Fig. 126.

Hipót.:	$ABCD$ cuadrilátero.
Tesis:	$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ rectos.

Efectivamente, si en el cuadrilátero $ABCD$ (fig. 126) se traza la diagonal AC, se forman dos $\triangle ABC$ y ACD, y como la suma de los ángulos de cada uno de estos triángulos es igual a dos rectos, la de los ángulos del cuadrilátero $ABCD$ es igual a cuatro rectos.

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4 \text{ rectos.}$$

II. PROPIEDADES DE LOS PARALELOGRAMOS

106. Teorema. — *En todo paralelogramo:*

1º *Los lados opuestos son iguales.*

2º *Los ángulos opuestos son iguales.*

3º *Los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios.*

4º *Las diagonales se cortan en su punto medio.*

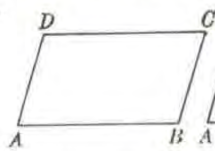


Fig. 127.

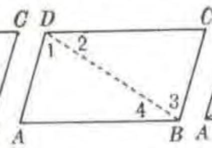


Fig. 128.

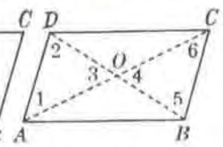


Fig. 129.

Hipót.: $AB \parallel DC,\ AD \parallel BC.$

Tesis: $AB = DC,\ AD = BC,$
$\angle A = \angle C,\quad \angle B = \angle D,$
$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C \ldots = 180°,$
$OA = OC,\ OB = OD.$

De la figura 127 se deducen las relaciones siguientes:

1º $AB = DC,$ por ser partes de $\parallel$s comprendidas entre $\parallel$s;
$AD = BC,$ por ser partes de $\parallel$s comprendidas entre $\parallel$s.

2º $\angle A = \angle C,$ por ser $\measuredangle$ agudos de lados $\parallel$s;
$\angle B = \angle D,$ por ser $\measuredangle$ obtusos de lados $\parallel$s.

3º $A + B = B + C = C + D = D + A = 180°,$
por ser ángulos colaterales internos comprendidos entre paralelas.

4º Considerando los $\triangle AOD$ y BOC de la figura 129, se tiene:

$AD = BC,$ por ser lados opuestos de un $\square$;
$\angle 2 = \angle 5,$ por ser $\measuredangle$ alternos internos entre $\parallel$s;
$\angle 1 = \angle 6,$ por ser $\measuredangle$ alternos internos entre $\parallel$s.

$\therefore \triangle AOD = \triangle BOC,$

por tener un lado igual adyacente a $\measuredangle$ respectivamente iguales.

$\therefore OA = OC$ y $OB = OD,$

por ser lados homólogos de triángulos iguales.

107. Recíproco. — *Un cuadrilátero es un paralelogramo:*

1º *Si los lados opuestos son iguales.*

2º *Si los ángulos opuestos son iguales.*

3º *Si los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios.*

4º *Si las diagonales se cortan en su punto medio* (figuras 127, 128 y 129).

Hipót.: $AB = DC,\ AD = BC,$
$\angle A = \angle C,\ \angle B = \angle D,$
$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C \ldots = 180°,$
$OA = OC,\ OB = OD.$

Tesis: $AB \parallel DC,\ AD \parallel BC.$

1º En la figura 128 trácese la diagonal DB; se forman dos triángulos ABD y BCD en los cuales se tiene:

$AB = DC,$ por hipótesis;
$BC = AD,$ por hipótesis;
$\triangle ABD = \triangle BCD,$ por tener sus lados respect. iguales.

$\therefore \angle 1 = \angle 3,$ por ser $\measuredangle$ homólogos de $\triangle$ iguales;
$\angle 2 = \angle 4,$ por ser $\measuredangle$ homólogos de $\triangle$ iguales.

$\therefore AB \parallel DC$ y $AD \parallel BC,$

por la igualdad de los ángulos alternos internos $2 = 4$ y $1 = 3$.

2º De la figura 127 se deduce:

$A + B + C + D = 360°,$ por ser los $\measuredangle$ de un cuadrilátero;
$2A + 2B = 360°,$ por ser $A = C$ y $B = D$, por hipót.;
$A + B = 180°,$ por ser mitades de cant. iguales.

$\therefore AD \parallel BC,$

por ser suplementarios los ángulos colaterales internos A y B.

De una manera análoga se demostraría que las rectas AB y DC son paralelas.

$\therefore AB \parallel BC$ y $AD \parallel BC.$

3º En la figura 127 se tiene:

$$A + B = B + C = C + D = D + A = 180°, \text{ por hipótesis.}$$

$$\therefore AB \parallel DC \text{ y } AD \parallel BC,$$

por ser suplementarios los ángulos colaterales internos.

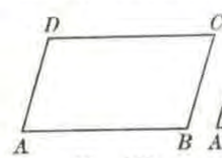


Fig. 127.

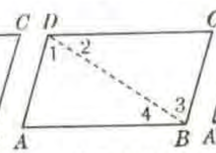


Fig. 128.

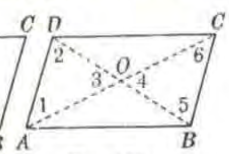


Fig. 129.

4º De los $\triangle\!\!\triangle AOD$ y BOC (fig. 129), se deduce:

$OA = OC$ y $OB = OD$, por hipótesis;

$\angle 3 = \angle 4$, por $\measuredangle$ opuestos por el vértice.

$$\therefore \triangle AOD = \triangle BOC,$$

por tener un ángulo igual entre lados respectivamente iguales.

$\therefore \angle 1 = \angle 6$, por ser $\measuredangle$ homólogos de $\triangle\!\!\triangle$ iguales.

$$\therefore AD \parallel BC,$$

por la igualdad de los ángulos alternos internos $1 = 6$.

De igual modo se demostraría que $AB \parallel DC$.

$$\therefore AB \parallel DC \text{ y } AD \parallel BC.$$

108. Teorema. — *Todo cuadrilátero que tiene dos lados iguales y paralelos es un paralelogramo.*

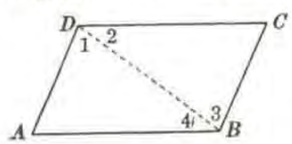


Fig. 130.

Hipót.: $AB = DC$, $AB \parallel DC$.
Tesis: $AD \parallel BC$.

Trácese la diagonal DB; resulta:

$AB = DC$, por hipótesis;

$\angle 2 = \angle 4$, por $\measuredangle$ alternos internos entre $\parallel$s.

$$\therefore \triangle ABD = \triangle BCD,$$

por tener un ángulo igual entre lados respectivamente iguales.

$\therefore \angle 1 = \angle 3$, por ser $\measuredangle$ homólogos de $\triangle\!\!\triangle$ iguales.

$\therefore AD \parallel BC$, por los ángulos alternos internos $1 = 3$.

109. Propiedades particulares. — Los rectángulos, cuadrados y rombos son paralelogramos especiales que, además de tener las propiedades generales de todos los paralelogramos, tienen otras particulares que se explican a continuación.

110. Teorema. — *Las diagonales de un rectángulo son iguales.*

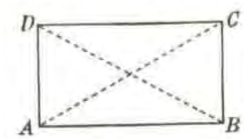


Fig. 131.

Hipót.: $ABCD$ es un $\square$.
Tesis: $AC = BD$.

En efecto: $\triangle ABC = \triangle DAB$,

por tener el cateto AB común y los otros dos catetos, iguales.

$$\therefore AC = BD.$$

111. Teorema. — *Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí y bisectrices de los ángulos del rombo.*

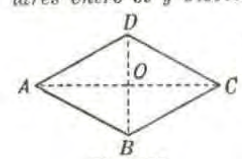


Fig. 132.

Hipót.: $ABCD$ es un rombo.
Tesis: $AC \perp BD$, AC y BD bisectrices.

Se tienen las siguientes igualdades:

$AB = BC = CD = DA$, por hipótesis;

$OA = OC$, $OB = OD$, por ser $ABCD$ un $\square$.

Luego, los $\triangle\!\!\triangle AOB$, BOC, COD, DOA son iguales por tener los lados respectivamente iguales. Por tanto, los ángulos en O son también iguales, y por consiguiente, rectos.

Por la igualdad de los mismos triángulos, los pares de ángulos situados en A, B, C, D son respectivamente iguales. Luego, las diagonales AC y BD son perpendiculares y bisectrices de los ángulos del rombo.

112. Teorema. — *Las diagonales de un cuadrado son iguales, perpendiculares entre sí y bisectrices de los ángulos del cuadrado.*

El cuadrado tiene las mismas propiedades particulares que el rectángulo y el rombo. Por tanto, se le puede aplicar lo que se acaba de demostrar en los dos teoremas anteriores.

113. Teorema. — *Dos paralelogramos son iguales si tienen dos lados contiguos respectivamente iguales e igual el ángulo que forman.*

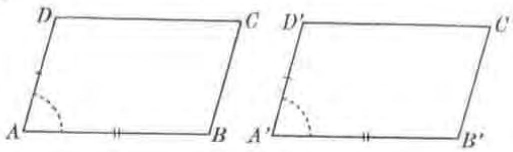


Fig. 133.

Hipót.:	$AB = A'B'$, $AD = A'D'$, $\angle A = \angle A'$.
Tesis:	$\square ABCD = \square A'B'C'D'$.

Cálquese el $\square A'B'C'D'$ y colóquese el calco sobre el $\square ABCD$, de modo que el $\angle A'$ coincida con el $\angle A$.

$A'B'$ coincide con AB, por ser iguales;
$A'D'$ coincide con AD, por ser iguales;
$D'C'$ toma la dirección de DC,

por ser ambos paralelos a AB y trazados desde el mismo punto D;

$B'C'$ toma la dirección de BC,

por ser ambos paralelos a AD y trazados desde el mismo punto B.

Luego, el punto C' cae en C y los dos paralelogramos coinciden.

$$\therefore \square ABCD = \square A'B'C'D'.$$

114. Corolarios. — 1º *Dos rectángulos son iguales cuando tienen dos lados contiguos respectivamente iguales.*

2º *Dos rombos son iguales cuando tienen un lado y un ángulo respectivamente iguales.*

3º *Dos cuadrados son iguales cuando tienen el lado igual.*

115. Simetría en los paralelogramos. — 1º En todo paralelogramo, la intersección de las diagonales es un *centro de simetría*, (fig. 134), porque dicha intersección está en el punto medio de ambas diagonales, y también en el punto medio de cualquier recta, MN por ejemplo, que, pasando por la intersección de las diagonales, termina en los lados del paralelogramo.

178

En efecto:

$OA = OC$, por ser $ABCD$ un $\square$;
$\angle 1 = \angle 2$, por alternos internos entre $\|$s;
$\angle 3 = \angle 4$, por opuestos por el vértice.

$$\therefore \triangle AMO = \triangle CNO,$$

por tener un lado igual y los $\measuredangle$ adyacentes respect. iguales.

$$\therefore OM = ON.$$

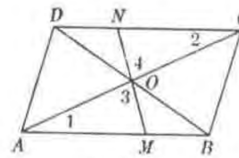


Fig. 134.

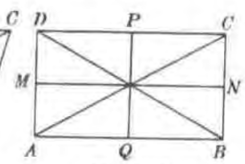


Fig. 135.

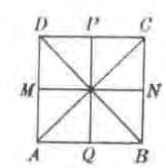


Fig. 136.

2º El rectángulo, por ser un paralelogramo, tiene un *centro de simetría*, que es la intersección de sus diagonales (fig. 135). Además, tiene dos *ejes de simetría*, que son las dos mediatrices MN y PQ de los lados opuestos. Efectivamente, cada una de ellas divide el rectángulo en dos partes iguales y simétricamente dispuestas.

3º El rombo, por ser un paralelogramo, tiene un *centro de simetría*, que es la intersección de sus diagonales (fig. 132). Además, tiene dos *ejes de simetría*, que son las mismas diagonales. Efectivamente, cada una de estas últimas divide el rombo en dos partes iguales y simétricamente dispuestas.

4º El cuadrado participa de las propiedades del rectángulo y del rombo. Por tanto, tiene como *centro de simetría* la intersección de las diagonales, y como *ejes de simetría*, dichas diagonales y las mediatrices MN y PQ de los lados opuestos (fig. 136).

¿Por qué en el paralelogramo de la figura 134 *no hay eje de simetría?*

¿Cómo son entre sí los 6 *triángulos de la figura* 134?

¿Cómo son entre sí los 8 *triángulos de la figura* 135?

¿Cómo son entre sí los 8 *triángulos de la figura* 136?

III. PROPIEDADES DE LOS TRAPECIOS

116. Teorema. — *La base media de un trapecio es paralela a las bases e igual a su semisuma.*

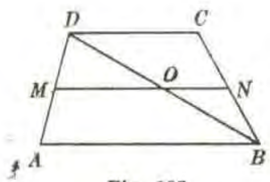


Fig. 137.

Hipót.:	MN base media de $ABCD$.
Tesis:	$MN \parallel AB$ y DC, $MN = \dfrac{AB + DC}{2}$.

Trácese la diagonal DB, y únase su punto medio O con los puntos medios M y N de AD y BC.

En el $\triangle ABD$, la recta OM es $\parallel$ a AB e igual a su mitad (Nº 78).

En el $\triangle BCD$, la recta ON es $\parallel$ a DC e igual a su mitad.

Luego, ON es $\parallel$ a AB, por ser $DC \parallel$ a AB.

Pero por el punto O sólo se puede trazar una paralela a AB; luego, OM y ON forman una sola recta que se confunde con MN.

$$\therefore MN \parallel AB \text{ y } DC.$$

Por otra parte:

$$OM + ON = MN = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2} = \frac{AB + DC}{2}.$$

117. Teorema. — *Los ángulos adyacentes a cada uno de los lados no paralelos de un trapecio son suplementarios.*

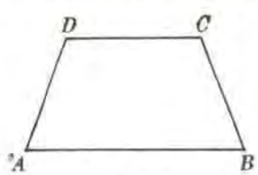


Fig. 138.

Hipót.:	$ABCD$ es un trapecio.
Tesis:	$\angle A + \angle D = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$.

En efecto:

$A + D = 180°$, por colaterales internos;
$B + C = 180°$, por colaterales internos.

179

118. Teorema. — *Los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles son iguales.*

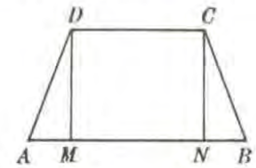


Fig. 139.

Hipótesis:
$ABCD$ trapecio isósceles.
Tesis:
$\angle A = \angle B$, $\angle ADC = \angle BCD$.

Trácense las ⊥s DM y CN a las bases. Se tiene:

$AD = BC$, por hipótesis;
$DM = CN$, por ser lados opuestos del ▭$MNCD$.

Luego, los $\triangle\triangle AMD$ y BNC son iguales, por tener la hipotenusa y un cateto respectivamente iguales. Por tanto:

$\angle A = \angle B$, por ser ∡ homólogos de $\triangle\triangle$ iguales;
$\angle ADC = \angle BCD$, por ser suplementos de los ∡A y B.

119. Teorema. — *Las diagonales de un trapecio isósceles son iguales.*

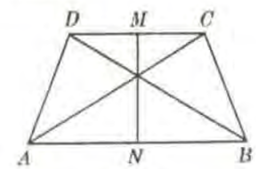


Fig. 140.

Hipót.:	$ABCD$ trapecio isósceles.
Tesis:	$AC = BD$.

Por el teorema anterior y por definición, se tiene:

$\angle DAB = \angle ABC$, por ser ∡ adyacentes a la base AB;
$AD = BC$, por hipótesis.

Luego, los $\triangle\triangle ABD$ y ABC son iguales, por tener un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales.

$$\therefore AC = BD.$$

120. Simetría en el trapecio isósceles. — La mediatriz MN, común a las dos bases del trapecio $ABCD$ (fig. 140), es *eje de simetría*, puesto que divide la figura en dos partes iguales y simétricamente dispuestas.

IV. CONSTRUCCIONES

121. Construcción de paralelogramos. — 1º *Construir un paralelogramo, dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos* (fig. 141).

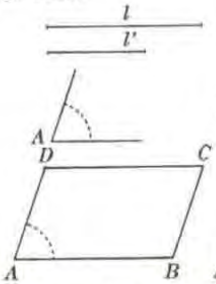


Fig. 141.

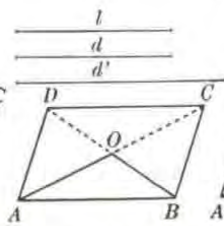


Fig. 142.

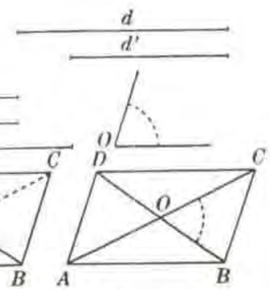


Fig. 143.

Se construye un $\angle A$ igual al ángulo dado, y desde el vértice se llevan sobre sus lados, respectivamente, las longitudes dadas, Luego, desde los extremos B y D, se trazan sucesivamente paralelas a AD y AB que se cortan en C, y se obtiene el paralelogramo pedido $ABCD$.

2º *Construir un paralelogramo, dados un lado y las dos diagonales* (fig. 142).

Con el lado dado y la mitad de cada diagonal, se construye el $\triangle ABO$. Luego, se prolongan las diagonales hasta que tengan su verdadera longitud y sus extremos D y C se unen, respectivamente, con A y B y entre sí. La figura $ABCD$ en el paralelogramo pedido.

3º *Construir un paralelogramo, dadas las diagonales y el ángulo que forman* (fig. 143).

Se construye un $\angle BOC$ igual al ángulo dado; se prolongan sus lados en ambos sentidos, y se toman, respectivamente, sobre cada uno de ellos, y en cada sentido, la mitad de las diagonales. Uniendo consecutivamente los extremos, se tiene la figura $ABCD$ que es el paralelogramo pedido.

122. Construcción de rectángulos. — 1º *Construir un rectángulo, dados un lado y la diagonal* (fig. 144).

Se construye el $\triangle$ rectángulo BAD, del que se conocen la hipotenusa $DB = d$ y el cateto $AB = l$. Luego, desde B y D, se

180

trazan sucesivamente perpendiculares a AB y AD, que se cortan en C; y así se obtiene el rectángulo pedido $ABCD$.

2º *Construir un rectángulo, dada la diagonal y el ángulo que forma con uno de los lados* (fig. 145).

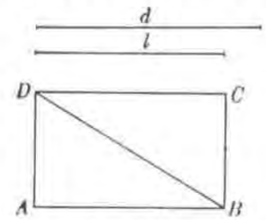


Fig. 144.

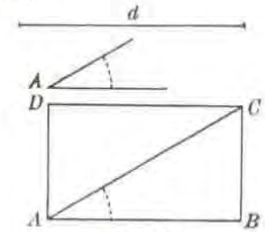


Fig. 145.

Se construye el $\triangle$ rectángulo ABC, del que se conocen la hipotenusa $AC = d$ y el $\angle$ agudo A. Luego, desde A y C, se trazan sucesivamente perpendiculares a AB y BC, que se cortan en D; y así se obtiene el rectángulo pedido $ABCD$.

123. Construcción de rombos. — 1º *Construir un rombo, dados el lado y un ángulo* (fig. 146).

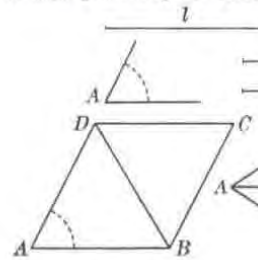


Fig. 146.

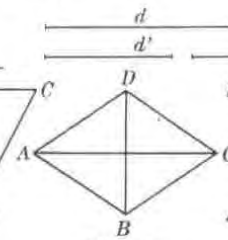


Fig. 147.

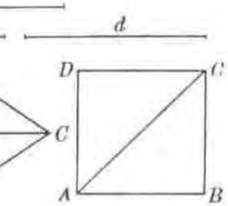


Fig. 148.

Se construye primero el $\triangle ABD$, del que se conocen dos lados y el ángulo comprendido, y luego, el $\triangle BCD$, del que se conocen los tres lados. Así se tiene el rombo pedido $ABCD$.

2º *Construir un rombo, dadas las diagonales* (fig. 147).

Se trazan dos rectas perpendiculares, AC y BD; desde su intersección y por ambas partes de cada una, se toman longitudes iguales a la mitad de las diagonales respectivas, y se unen consecutivamente los extremos, resultando así el rombo pedido $ABCD$.

CAPITULO VIII

CIRCUNFERENCIA Y CIRCULO

I. DEFINICIONES Y PROPIEDADES

138. Definiciones. — *Llámase* **circunferencia** *una curva plana y cerrada, cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado centro* (fig. 160).

Círculo *es la superficie plana limitada por la circunferencia* (fig. 161).

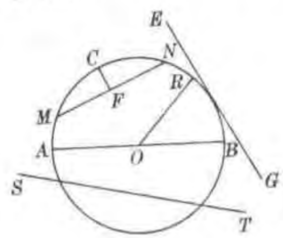


Fig. 160.

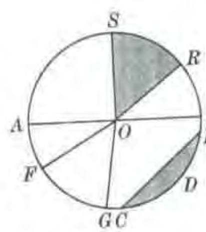


Fig. 161.

La circunferencia divide el plano que la contiene en dos partes: una *interior*, que es el círculo, y otra *exterior*.

Radio es la recta que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia; v. gr.: el radio OR.

Se denomina abreviadamente una circunferencia o un círculo con la letra colocada en su centro y la que representa el radio; v. gr.: la circunferencia o el círculo de centro O y de radio r se expresa $C(O, r)$.

Con frecuencia se reemplazan las palabras circunferencia o círculo con el símbolo ⊙.

Diámetro es la recta que une dos puntos de la circunferencia, pasando por el centro; v. gr.: el diámetro AB.

Arco es una parte determinada de la circunferencia; v. gr.: el arco MCN (fig. 160).

Cuerda es toda recta que une dos puntos de la circunferencia; v. gr.: la cuerda MN (fig. 160).

Se dice que una cuerda *subtiende* el arco que termina en sus extremos.

Flecha o *sagita* es la parte de radio, perpendicular en el punto medio de una cuerda, comprendida entre ésta y el arco subtendido por ella; v. gr.: la flecha FC (fig. 160).

Secante es una recta que corta la circunferencia en dos puntos; v. gr.: la secante ST (fig. 160).

Tangente es una recta que tiene un solo punto común con la circunferencia; v. gr.: la tangente EG (fig. 160).

Angulo central es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y cuyos lados son radios, v. gr.: el ángulo BOR (fig. 160).

Sector circular es la parte de círculo comprendida entre dos radios y el arco interceptado por ellos; v. gr.: el sector ORS (fig. 161).

Segmento circular es la parte de círculo comprendida entre una cuerda y su arco; v. gr.: el segmento CDE (fig. 161).

139. Propiedades. — 1ª *En toda circunferencia o círculo se puede trazar un número indefinido de radios y de diámetros.*

2ª *Todos los radios de una circunferencia o de un círculo son iguales, y los diámetros también.*

3ª *Todos los puntos del plano de una circunferencia cuya distancia al centro es menor que el radio, son interiores a dicha circunferencia, y todos los puntos cuya distancia al centro es mayor que el radio, le son exteriores.*

4º *El diámetro es el doble del radio y es la mayor de las cuerdas.*

Efectivamente, en la figura 162 se ve que:

$$AB = AO + OB = CO + OD > CD.$$
$$\therefore AB = 2r > CD.$$

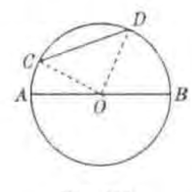


Fig. 162.

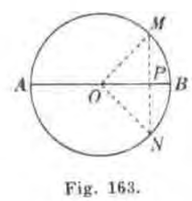


Fig. 163.

5ª *El centro de una circunferencia es un centro de simetría de la curva.*

Efectivamente, los dos extremos de cualquier diámetro, AB por ejemplo (fig. 163), son simétricos con respecto al centro O, ya que éste divide el diámetro en dos segmentos iguales, por ser radios.

6ª *Todo diámetro de una circunferencia es un eje de simetría de la curva.*

Sean el diámetro AB de la circunferencia y M uno cualquiera de sus puntos (fig. 163).

Trácense el radio OM, la $\perp MN$ al diámetro AB y el radio ON. Los $\triangle$ rectángulos OPM y OPN son iguales por tener la hipotenusa igual y un cateto común. Luego, MP es igual a PN y los puntos M y N son simétricos.

7ª *El diámetro divide la circunferencia y el círculo en dos partes iguales, llamadas respectivamente semicircunferencias y semicírculos.*

Esta propiedad es consecuencia de la anterior, ya que cualquier diámetro es un eje de simetría.

8ª *Dos circunferencias o dos círculos* C *y* C', *de centros* O *y* O' *y de radios* r *y* r' *iguales, son iguales.*

Efectivamente, si se coloca una figura sobre la otra de modo que los centros coincidan, todas las partes de la una coinciden con sus correspondientes de la otra.

Se tiene pues: $C(O, r) = C'(O', r')$.

140. Distancia de un punto a una circunferencia. — *Llámase distancia de un punto a una circunferencia la parte del radio o de su prolongación, que pasa por dicho punto, comprendida entre el punto y la circunferencia;* v. gr.: las distancias NC y MA (fig. 164).

141. Teorema. — *La distancia de un punto a una circunferencia es menor que cualquiera otra recta que pueda trazarse desde el punto a la circunferencia.*

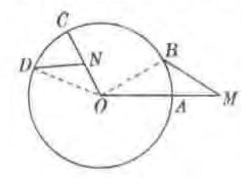


Fig. 164.

Hipót.:	M punto exterior a la $\odot O$, N punto interior a la $\odot O$.
Tesis:	$AM < BM$, $CN < DN$.

Trácense los radios OB y OD.

1º Considerando el $\triangle OMB$, se tiene:

$$OM < OB + BM, \quad \text{por ser } OM \text{ una recta;}$$
$$OA + AM < OB + BM, \quad \text{por ser } OM = OA + AM.$$

Suprímanse en ambos miembros los términos $OA = OB$ y resulta:

$$AM < BM.$$

2º Considerando el $\triangle OND$, se obtiene:

$$OD < ON + DN, \quad \text{por ser } OD \text{ una recta;}$$
$$ON + CN < ON + DN, \quad \text{por ser } OD = ON + CN.$$

Suprímase en ambos miembros el término ON y queda la desigualdad

$$CN < DN.$$

¿Qué es el segmento PB *con relación al arco* MBN? (fig. 163).

¿Cuántos ejes de simetría tiene una circunferencia?

¿En qué caso el triángulo COD *de la figura* 162 *puede ser equilátero?*

¿En qué caso el triángulo DON *de la figura* 164 *puede ser isósceles?*

II. POSICIONES RELATIVAS DE UNA CIRCUNFERENCIA Y UNA RECTA

142. Casos que pueden presentarse. — Pueden presentarse cuatro casos, según sea la distancia del centro de la circunferencia a la recta.

1º Si la distancia OP del centro de una circunferencia a una recta AB es *mayor que el radio*, la recta no corta ni toca la circunferencia; por tanto, es *exterior* (fig. 165).

2º Si la distancia OP es *igual al radio*, la recta AB toca la circunferencia en un solo punto, es decir, es *tangente* a dicha circunferencia (fig. 166).

En efecto, todos los demás puntos de la recta son exteriores a la circunferencia; por tanto, su distancia al centro es mayor que el radio.

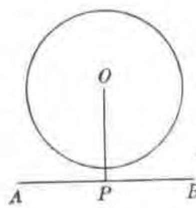


Fig. 165.

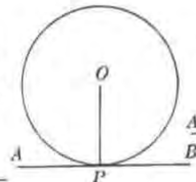


Fig. 166.

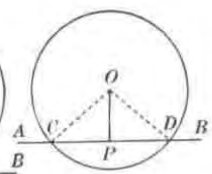


Fig. 167.

3º Si la distancia OP es *menor que el radio*, la recta AB corta la circunferencia en dos puntos, o sea, es *secante* a esta circunferencia (fig. 167).

Efectivamente, siendo la recta OP perpendicular a AB, sólo puede haber dos oblicuas OC y OD iguales al radio. Por consiguiente; los puntos C y D pertenecen a la vez a la circunferencia y a la recta.

4º Si la distancia OP es *nula*, la recta AB pasa por el centro, y por tanto, la parte que queda en el interior de la circunferencia es un diámetro.

183

143. Teorema. — *Toda perpendicular en el extremo de un radio es tangente a la circunferencia.*

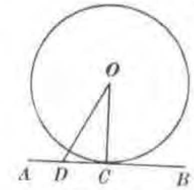


Fig. 168.

Hipót.:	AB es $\perp$ al radio OC.
Tesis:	AB es tangente a la $\odot\, O$.

Siendo $AB \perp OC$, OC es a su vez, $\perp$ a AB, y su extremo C pertenece a la circunferencia. Cualquier otro punto de AB, D por ejemplo, es exterior a la circunferencia. En efecto:

$$OD > OC, \text{ por ser } OD \text{ oblicua y } OC \perp AB.$$

$$\therefore AB \text{ es tangente a la } \odot\, O.$$

144. Recíproco. — *Toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que termina en el punto de contacto* (fig. 168).

Hipót.:	AB es tangente a la $\odot\, O$.
Tesis:	AB es $\perp$ al radio OC.

El punto C es común a la circunferencia y a la recta AB, y todos los demás puntos de dicha recta son exteriores a la circunferencia; por tanto, la recta OC es la más corta que se pueda trazar desde O a la recta AB. Luego, OC es $\perp$ a AB, y a su vez, AB es $\perp$ a OC.

145. Corolarios. — 1º *La perpendicular a una tangente en el punto de contacto pasa por el centro de la circunferencia.* Esta perpendicular se llama *normal* a la curva en el punto de tangencia.

2º *La perpendicular a una tangente trazada desde el centro de una circunferencia pasa por el punto de contacto.*

3º *Las tangentes trazadas en los extremos de un diámetro son paralelas.* Efectivamente, ambas son perpendiculares a dicho diámetro.

146. Teorema. — *Las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia son iguales y forman ángulos iguales con la recta que une el punto con el centro de la circunferencia.*

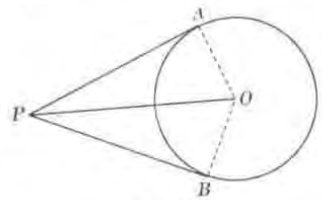


Fig. 169.

Hipót.:	PA y PB tangentes a la $\odot O$.
Tesis:	$PA = PB$, $\angle APO = \angle BPO$.

Trácense los radios OA y OB. Según el teorema anterior, las rectas PA y PB son perpendiculares a los radios OA y OB. Luego, los dos $\triangle$ rectángulos OAP y OBP son iguales, por tener la hipotenusa común y los catetos OA y OB iguales.

$$\therefore PA = PB \text{ y } \angle APO = \angle BPO.$$

147. Teorema. — *En toda circunferencia el diámetro perpendicular a una cuerda divide la cuerda y el arco subtendido en dos partes iguales.*

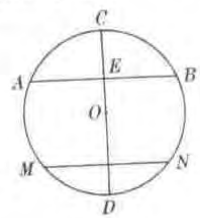


Fig. 170.

Hipót.:	$CD \perp AB$.
Tesis:	$AE = EB$, arco AC = arco CB.

Las dos partes en que quedan divididos el arco ACB y la cuerda AB por el diámetro CD son simétricas con relación a ese diámetro. Luego dichas partes son iguales y se tiene:

$$AE = EB \text{ y arco } AC = \text{arco } CB.$$

148. Corolarios. — 1º *Los arcos de una circunferencia comprendidos entre paralelas son iguales.*

En efecto, de la figura 170 se deduce, según el teorema anterior:

$$\text{arco } CAM = \text{arco } CBN;$$
$$\text{arco } CA = \text{arco } CB.$$

Restando miembro a miembro estas igualdades, resulta:

$$\text{arco } AM = \text{arco } BN.$$

2º *Dos diámetros perpendiculares dividen la circunferencia en cuatro arcos iguales, llamados cuadrantes.*

3º ***La mediatriz** de una cuerda **pasa** por el centro de la circunferencia y **divide** en dos partes iguales los arcos subtendidos por la cuerda.*

149. Teorema. — *En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, ángulos centrales iguales interceptan arcos iguales, y de dos ángulos centrales desiguales el mayor intercepta mayor arco.*

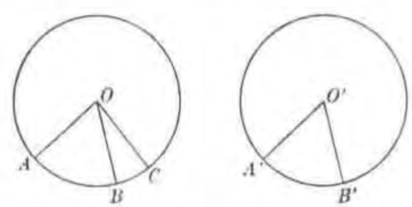


Fig. 171.

Hipót.:	$\odot O = \odot O'$, $\angle AOB = \angle A'O'B'$, $\angle AOC > \angle A'O'B'$.
Tesis:	arco AB = arco $A'B'$, arco $AC >$ arco $A'B'$.

1º Colóquese la $\odot O'$ sobre la $\odot O$, de modo que el $\angle A'O'B'$ coincida con su igual AOB. Siendo iguales los radios, los puntos A' y B' coinciden respectivamente con los puntos A y B, y el arco $A'B'$, con el arco AB.

$$\therefore \text{arco } AB = \text{arco } A'B'.$$

2º Colóquese la $\odot O'$ sobre la $\odot O$, de modo que el radio $O'A'$ coincida con OA. El $\angle A'O'B'$ ocupa solamente una parte del $\angle OAC$, y el arco $A'B'$, una parte del arco AC.

$$\therefore \text{arco } AC > \text{arco } A'B'.$$

150. Reciproco. — *En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, a arcos iguales corresponden ángulos centrales iguales, y al mayor de dos arcos corresponde mayor ángulo central.*

Hipót.: $\odot O = \odot O'$, arco $AB =$ arco $A'B'$, arco $AC >$ arco $A'B'$.
Tesis: $\angle AOB = \angle A'O'B'$, $\angle AOC > \angle A'O'B'$.

Se demuestra este recíproco por superposición de las dos partes de la figura 171, como en el teorema directo, pero haciendo coincidir, total o parcialmente, los arcos en vez de los ángulos.

151. Teorema. — *En una circunferencia o en circunferencias iguales, arcos iguales son subtendidos por cuerdas iguales, y el mayor de dos arcos desiguales es subtendido por mayor cuerda.*

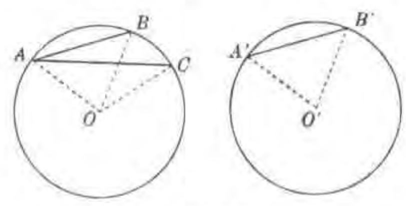


Fig. 172.

Hipót.: $\odot O = \odot O'$, arco $AB =$ arco $A'B'$, arco $AC >$ arco $A'B'$.
Tesis: $AB = A'B'$, $AC > A'B'$.

Trácense los radios OA, OB, OC, $O'A'$, $O'B'$.

1º Según el recíproco anterior, $\angle AOB = \angle A'O'B'$. Luego, los $\triangle AOB$ y $A'O'B'$ son iguales, por tener un ángulo igual, comprendido entre lados iguales.

$$\therefore AB = A'B'.$$

2º Según el mismo recíproco, $\angle AOC > \angle A'O'B'$. Luego, los $\triangle AOC$ y $A'O'B'$ tienen dos lados iguales y el $\angle AOC$ del primero es mayor que el $\angle A'O'B'$ del segundo.

$$\therefore AC > A'B'. \quad (^1)$$

(1) La segunda parte de este teorema y de su recíproco, sólo es verdadera para arcos menores que una semicircunferencia.

152. Reciproco. — *En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, cuerdas iguales subtienden arcos iguales, y de dos cuerdas desiguales la mayor subtiende mayor arco* (fig. 172).

Hipót.: $\odot O = \odot O'$, $AB = A'B'$, $AC > A'B'$.
Tesis: arco $AB =$ arco $A'B'$, arco $AC >$ arco $A'B'$.

1º Los $\triangle AOB$ y $A'O'B'$ son iguales, por tener los lados respectivamente iguales.

$$\therefore \angle AOB = \angle A'O'B';$$
$$\text{arco } AB = \text{arco } A'B'.$$

2º Los $\triangle AOC$ y $A'O'B'$ tienen dos lados iguales y el lado AC, mayor que $A'B'$.

$$\therefore \angle AOC > \angle A'O'B';$$
$$\text{arco } AC > \text{arco } A'B'.$$

153. Teorema. — *En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, las cuerdas iguales equidistan del centro.*

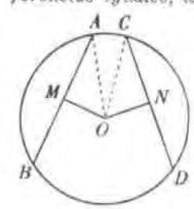


Fig. 173.

Hipót.: $AB = CD$, $OM \perp AB$, $ON \perp CD$.
Tesis: $OM = ON$.

Trácense los radios OA y OC. Se tiene: $AM = CN$, por mitades de cuerdas iguales.

$$\therefore \triangle AMO = \triangle CNO,$$

por tener la hipotenusa y un cateto respectivamente iguales.

$$\therefore OM = ON.$$

154. Recíproco. — *En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, las cuerdas que equidistan del centro son iguales* (fig. 173).

Hipót.: $OM = ON$.	Tesis: $AB = CD$.

Se tiene: $OM = ON$, por hipótesis.

$$\therefore \triangle AMO = \triangle CNO,$$

por tener la hipotenusa y un cateto respectivamente iguales.

$\therefore AM = CN$, por lados homólogos de $\triangle$ iguales;
$AB = CD$, por tener sus mitades iguales.

155. Teorema. — *En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, dos cuerdas desiguales, distan desigualmente del centro y la mayor es la que dista menos.*

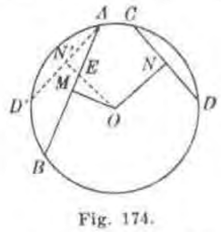


Fig. 174.

Hipót.: $AB > CD$, $OM \perp AB$, $ON \perp CD$.
Tesis: $OM < ON$.

Trácense $AD' = CD$ y $ON' \perp AD'$. Se tiene:

$ON = ON'$, por ser CD igual a AD';
$OM < OE$, por ser $OM \perp AB$ y OE oblicua;
$OM < ON'$, por ser ON' mayor que OE.
$\therefore OM < ON$, por ser ON' igual a ON.

156. Recíproco. — *En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, de dos cuerdas que distan desigualmente del centro, la que dista menos es la mayor* (fig. 174).

Hipót.: $OM < ON$.	Tesis: $AB > CD$.

Si fuera $AB = CD$, resultaría $OM = ON$, y si fuera $AB < CD$, resultaría $OM > ON$, según el teorema directo, lo cual es contrario a la hipótesis.

$$\therefore AB > CD.$$

157. Teorema. — *Por tres puntos no alineados puede pasar una circunferencia y solamente una.*

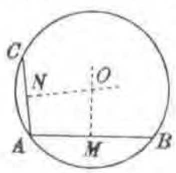


Fig. 175.

Hipót.: Puntos A, B y C no alineados.
Tesis: $\odot O$ única que puede pasar por A, B y C.

(186)

Trácense los segmentos AB y AC, y sus mediatrices MO y NO. Estas mediatrices se cortan, puesto que los segmentos no son paralelos. El punto de intersección O equidista de A y B, por pertenecer a la mediatriz MO; también equidista de A y C, por pertenecer a la mediatriz NO; luego, equidista de los tres puntos A, B, C, y por ellos pasa la circunferencia de radio OA, descrita desde O como centro.

No pudiendo las mediatrices cortarse en más de un punto, el punto O es el único que puede ser centro de una circunferencia que pase por A, B y C.

158. Corolarios. — 1º *Tres puntos no alineados determinan una circunferencia.*

2º *Dos circunferencias no pueden tener más de dos puntos comunes*, pues de lo contrario coincidirían.

3º *Siempre se puede describir una circunferencia que pase por los tres vértices de un triángulo.* Entonces, se dice que la circunferencia está *circunscrita* al triángulo, y que el triángulo está *inscrito* en la circunferencia.

III. POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

159. Casos que pueden presentarse. — Las principales posiciones relativas de dos circunferencias son las siguientes:

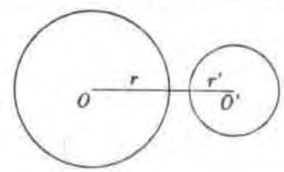


Fig. 176.

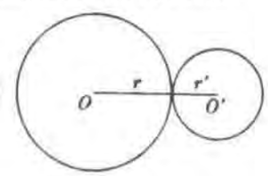


Fig. 177.

1º *Exteriores*, cuando todos los puntos de cada una de ellas son exteriores a la otra (fig. 176).

2º *Tangentes exteriores*, cuando tienen un solo punto común y los demás puntos de cada una son exteriores a la otra (fig. 177).

3º *Secantes*, cuando tienen dos puntos comunes (fig. 178).

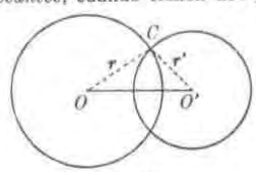


Fig. 178.

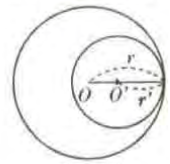


Fig. 179.

4º *Tangentes interiores*, cuando tienen un solo punto común y la una es interior a la otra (fig. 179).

5º *Interiores*, cuando todos los puntos de una de ellas son interiores a la otra (fig. 180).

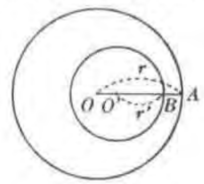


Fig. 180.

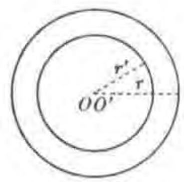


Fig. 181.

6º *Concéntricas*, cuando tienen el mismo centro y radios desiguales (fig. 181).

160. Teorema. — *Si dos circunferencias son secantes, la línea de los centros es mediatriz de la cuerda común, y los puntos de contacto son simétricos con respecto a la línea de los centros.*

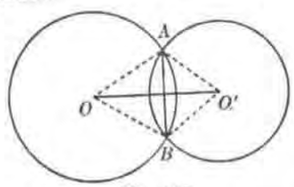


Fig. 182.

Hipót.:	$\odot O$ y $\odot O'$ secantes.
Tesis:	OO' mediatriz de AB, B simétrico de A.

Trácense los radios OA, OB, $O'A$, $O'B$. Se tiene:

$OA = OB$, por ser radios de la $\odot O$;
$O'A = O'B$, por ser radios de la $\odot O'$.

Luego, la recta OO' es mediatriz de la cuerda AB, y los puntos A y B son simétricos con respecto a OO'.

161. Teorema. — *Si dos circunferencias son tangentes, el punto de contacto está en la línea de los centros.*

Efectivamente, si el punto de contacto no estuviera en la línea de los centros, habría otro punto de contacto simétrico del primero, con respecto a la línea de los centros, lo cual es contrario a la hipótesis.

162. Relación entre los radios y la distancia de los centros. — 1º Si las circunferencias son *exteriores*, la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios.

Representando por r y r' los radios, es evidente que (fig. 176):

$$OO' > r + r'.$$

2º Si las circunferencias son *tangentes exteriores*, la distancia de los centros es igual a la suma de los radios.

Teniendo presente que el punto de tangencia está en la línea de los centros, se ve claramente que (fig. 177):

$$OO' = r + r'.$$

3º Si las circunferencias son *secantes*, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.

En la figura 178 la línea de los centros OO' y los radios OC y $O'C$ forman el $\triangle OO'C$, en el que un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. Por tanto:

$$r + r' > OO' > r - r'.$$

4º Si las circunferencias son *tangentes interiores*, la distancia de los centros es igual a la diferencia de los radios.

Considerando la figura 179, es evidente que:

$$OO' = r - r'.$$

5º Si las circunferencias son *interiores*, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios.

De la figura 180 se deduce:

$$OO' = OA - O'B - BA;$$

o sea:

$$OO' = r - r' - BA.$$

Suprimiendo el término negativo BA del segundo miembro, éste aumenta y se tiene la desigualdad:

$$OO' < r - r'.$$

6º Si las circunferencias son *concéntricas*, la distancia de los centros es nula, puesto que los centros coinciden. Luego, se tiene:

$$OO' = 0.$$

IV. CONSTRUCCIONES

163. Problema. — *Construir una circunferencia que pase por tres puntos no alineados,* A, B *y* C (fig. 183).

Trácense las rectas *AB* y *BC*, las mediatrices *MO* y *NO*, y la recta *OA*. La circunferencia descrita desde la intersección *O* de las mediatrices como centro, y con *OA* por radio, es la circunferencia pedida.

Efectivamente, el punto *O* equidista de los puntos *A, B* y *C*, como se demostró anteriormente (Nº 157).

164. Problema. — *Hallar el centro de una circunferencia o de un arco.*

Supóngase desconocido el centro de la circunferencia de la figura 183. Señálense en la circunferencia tres puntos cualesquiera, *A, B* y *C*, por ejemplo; trácense las cuerdas *AB* y *BC*, y las mediatrices *MO* y *NO* de dichas cuerdas. Su intersección *O* es el centro pedido.

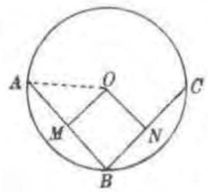


Fig. 183.

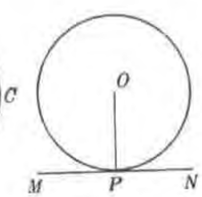


Fig. 184.

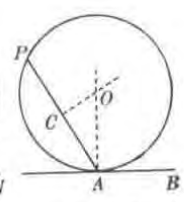


Fig. 185.

165. Problema. — *Trazar una tangente a una circunferencia por un punto* P, *dado en ella* (fig. 184).

Trácese el radio *OP* y luego la recta *MN* perpendicular a *OP* en el punto *P*. Dicha perpendicular es tangente a la circunferencia, puesto que tiene un solo punto común con ella.

166. Problema. — *Construir una circunferencia que pase por un punto* P *y sea tangente a una recta* AB *en un punto* A, *dado en ella* (fig. 185).

Se trazan la recta *AP* y las respectivas ⊥ *AO* y *CO* a *AB* y en el punto medio de *AP*. La intersección *O* de las dos perpendiculares es el centro de la circunferencia pedida.

188

167. Problema. — *Construir las circunferencias tangentes a tres rectas.*

Se pueden distinguir tres casos.

1º *Las tres rectas forman un triángulo* ABC (fig. 186).

Los centros de las circunferencias tangentes deben ser equidistantes de los tres lados del triángulo; y como las cuatro intersecciones de las seis bisectrices de los ángulos interiores y exteriores cumplen con esta condición (Nº 85), basta trazar dichas bisectrices y, desde los puntos en que se cortan, de tres en tres, construir las circunferencias tangentes a los lados del triángulo o a su prolongación, con radios iguales a la distancia de cada uno de esos puntos a los lados del triángulo. Estos radios son, respectivamente: *OD, A'E, B'G* y *C'F*.

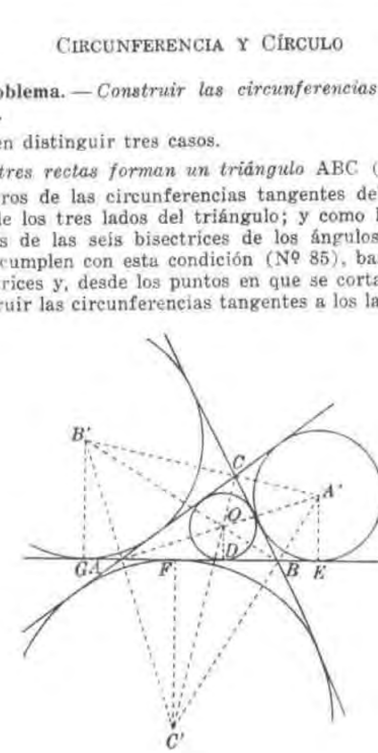


Fig. 186.

La ⊙ *O* se llama *inscrita* en el △*ABC*, y las ⊚ *A', B'* y *C'* se denominan *excritas* al mismo triángulo.

Nota. — La palabra *excrita* parece preferible a la denominación *exinscrita*, que suele emplearse, aunque impropiamente, porque las partículas *ex* e *in* tienen significados opuestos, y por tanto, se excluyen mutuamente.

2º *Dos de las rectas, AB y CD, son paralelas, y la otra MN es secante* (fig. 187).

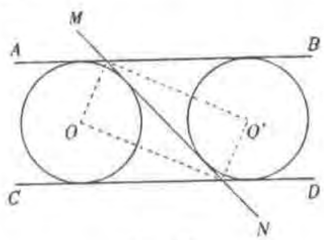


Fig. 187.

Los centros de las circunferencias tangentes deben estar situados en las bisectrices de los ángulos formados por las rectas dadas; y como dichas bisectrices son paralelas dos a dos, por ser bisectrices de ángulos alternos internos comprendidos entre paralelas, hay tan sólo dos puntos de intersección O y O'. Estos puntos equidistan de las tres rectas; luego son los centros de las circunferencias tangentes a dichas rectas.

3º *Las tres rectas son concurrentes o paralelas.*

En tal caso, no hay ninguna solución, porque no hay ningún punto que equidiste de las rectas.

EJERCICIO VIII

1. Trazar una circunferencia que pase por un punto A y que sea tangente a otra circunferencia en un punto B.

2. Trazar una circunferencia tangente a dos rectas, dado el punto de contacto con una de ellas.

3. Trazar una circunferencia tangente a una recta y a otra circunferencia en un punto dado en ésta.

4. La distancia de los centros de dos circunferencias mide 7 cm y el radio de una de ellas tiene 3 cm; ¿qué valores enteros puede tomar el radio de la otra para que las circunferencias sean exteriores?

5. Demostrar que si por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias secantes se traza una paralela a la línea de los centros, la suma de las cuerdas interceptadas en la paralela es doble de la línea de los centros (fig. 188).

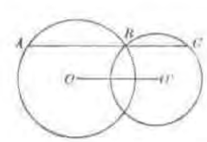


Fig. 188.

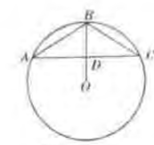


Fig. 189.

6. Demostrar que si las cuerdas AB y BC de una misma circunferencia son iguales, el radio OB divide la cuerda AC y el arco ABC en partes respectivamente iguales (fig. 189).

7. Probar que si el ángulo formado por dos cuerdas AB y BC es dividido en dos partes iguales por el radio que pasa por el punto B, las dos cuerdas son iguales (fig. 189).

8. Dado un punto en el interior de una circunferencia, hallar dos puntos de la circunferencia equidistantes del primero.

9. Por dos puntos A y B, dados en una recta, trazar una circunferencia tangente a una paralela CD a la recta dada.

10. Construir dos circunferencias concéntricas, dados dos puntos de cada una de ellas.

11. Por dos puntos A y B, dados en una recta, trazar una circunferencia tangente a una perpendicular a la recta AB.

12. Trazar una circunferencia de radio r que pase por un punto P y que sea tangente a una recta AB.

13. Probar que la cuerda menor que puede trazarse por un punto interior a una circunferencia es la perpendicular al diámetro que pasa por ese punto.

14. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas de una circunferencia paralelas a una recta dada?

15. Demostrar que todas las cuerdas iguales de una circunferencia son tangentes a otra circunferencia concéntrica a la primera.

16. Dadas una circunferencia O y una recta AB, trazar otra circunferencia de radio r que les sea tangente.

17. Trazar una circunferencia equidistante de tres puntos dados, y tal que su radio sea igual a r.

18. Construir una circunferencia de radio r que sea tangente a los lados de un ángulo dado.

19. Construir dos circunferencias tangentes exteriormente, sabiendo que la línea de los centros mide 3 cm y que la diferencia de los radios es de 6 mm.

20. Trazar dos circunferencias tangentes interiormente, sabiendo que la línea de los centros mide 1.5 cm y la suma de los radios es igual a 3.5 cm.

21. Demostrar que si dos circunferencias tangentes exteriormente son tangentes a una recta en A y B, su tangente común interior divide el segmento AB en dos partes iguales.

22. Dadas dos tangentes AB y CD a la circunferencia O, paralelas entre sí, y limitadas por otra tangente AC a la misma circunferencia, demostrar que el triángulo AOC es rectángulo (fig. 190).

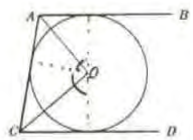


Fig. 190.

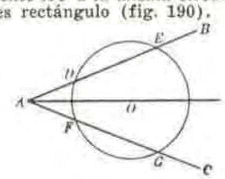


Fig. 191.

23. Demostrar que si por un punto de la bisectriz de un ángulo se traza una circunferencia que corte los lados del ángulo, las cuerdas determinadas en ellos son iguales (fig. 191).

24. Trazar una circunferencia de radio r tangente a otras dos circunferencias dadas.

25. Construir un triángulo isósceles ABC, dada la base AB y el radio r de la circunferencia circunscrita.

26. Construir un triángulo isósceles ABC, dada la base AB y el radio r de la circunferencia inscrita.

27. Si dos circunferencias son tangentes exteriormente, las tangentes trazadas a ellas desde cualquier punto de su tangente común interna son iguales. Demostrarlo.

28. Probar que la recta que va del centro de una circunferencia al punto de intersección de dos tangentes a ella es mediatriz de la cuerda que une los puntos de contacto.

29. Sabiendo que cada una de tres circunferencias, de 4.2, 3.8 y 3.6 cm de diámetro respectivamente, es tangente exteriormente a las otras dos, calcular el perímetro del triángulo formado por las líneas de los centros.

30. ¿Cuál es el lugar de los centros de las circunferencias de radio r que pasan por un punto dado?

31. ¿Cuál es el lugar de los centros de las circunferencias de radio r que son tangentes a una circunferencia dada OA?

32. Construir una circunferencia de 3 cm de radio tangente a una recta dada AB, y luego otra circunferencia de 2 cm de radio tangente a la misma recta y cuyo centro esté en la primera circunferencia.

190

CAPITULO IX

ANGULOS RELACIONADOS CON LA CIRCUNFERENCIA

I. MEDIDA DE ANGULOS Y DE ARCOS

168. **Definiciones.** — *Angulo central* es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. También se llama *ángulo en el centro.*

Angulo interior es el que tiene su vértice en el interior de la circunferencia.

Angulo inscrito es el que tiene su vértice en la circunferencia y está formado por dos cuerdas.

Angulo semiinscrito es el que tiene su vértice en la circunferencia y está formado por una cuerda y una tangente.

Angulo exterior es el que tiene su vértice en el exterior de la circunferencia y está formado por dos secantes, o por una secante y una tangente, o por dos tangentes; en este último caso se llama *ángulo circunscrito.*

169. **Medida de los arcos.** — Para medir los arcos se toma a veces como unidad el *cuadrante*, que es la cuarta parte de la circunferencia, o sea, 90 grados; pero generalmente se emplea el grado, que es igual a $\frac{1}{360}$ de la circunferencia, o $\frac{1}{90}$ del cuadrante.

El grado (°) se divide en 60 *minutos* ('), y el minuto, en 60 *segundos* (").

170. Teorema. — *Dos ángulos son directamente proporcionales a sus arcos correspondientes, trazados con igual radio, desde el vértice como centro.*

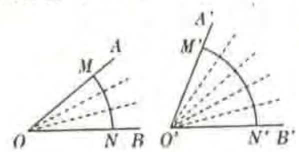


Fig. 192.

Hipót.: $\angle MON$ y $\angle M'O'N'$, MN y $M'N'$ arcos correspondientes.

Tesis: $\dfrac{\angle MON}{\angle M'O'N'} = \dfrac{\text{arco } MN}{\text{arco } M'N'}$.

1º *Los arcos son conmensurables*, es decir, tienen una medida común.

Si esta medida está contenida, por ejemplo, 3 veces en MN y 5 veces en $M'N'$, se tiene:

$$\frac{\text{arco } MN}{\text{arco } M'N'} = \frac{3}{5}.$$

Trazando radios por los puntos divisorios de los arcos, los ángulos quedan divididos en partes iguales, y se tiene:

$$\frac{\angle MON}{\angle M'O'N'} = \frac{3}{5}.$$

$$\therefore \frac{\angle MON}{\angle M'O'N'} = \frac{\text{arco } MN}{\text{arco } M'N'}.$$

2º *Los arcos son inconmensurables*, es decir, no tienen una medida común.

Si una unidad de medida está contenida un número entero de veces en el primer arco, y no lo está en el segundo, parte del segundo arco queda sin medir. En tal caso se puede escoger otra unidad más pequeña que esté contenida un número entero de veces en el primer arco, de suerte que la parte del segundo que queda sin medir sea más reducida. Así, se puede llegar a un residuo menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea. Por tanto, este residuo tiende a cero, a medida que aumenta el número de partes. En el límite, se puede pues escribir:

$$\frac{\angle MON}{\angle M'O'N'} = \frac{\text{arco } MN}{\text{arco } M'N'}.$$

171. Corolarios. — 1º *La medida de un ángulo cualquiera es el arco comprendido entre sus lados, descrito desde su vértice como centro.*

2º *La medida del ángulo recto es un cuadrante, la del ángulo de lados colineales es una semicircunferencia, y la del ángulo de una vuelta es una circunferencia.*

191

172. Teorema. — *La medida del ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

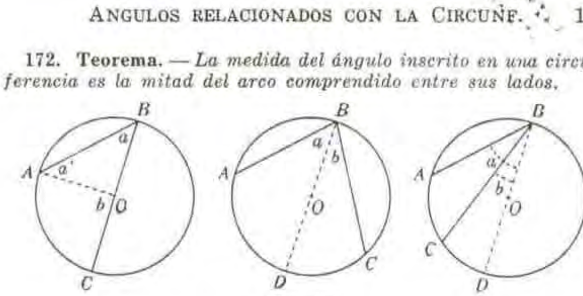


Fig. 193.

Hipót.: $\angle ABC$ inscrito en la $\odot O$.

Tesis: Medida del $\angle ABC = \frac{1}{2}$ arco AC.

1er *caso.* — *Un lado pasa por el centro.*

Trácese el radio OA. Por el $\triangle ABO$, se tiene:

$a = a'$, por ser isósceles el $\triangle ABO$;

$a + a' = b$, por ser el $\angle b$ exterior al $\triangle$;

$2a = b$, por ser $a = a'$.

$\therefore a = \frac{1}{2} b$.

Sustitúyase el $\angle b$ por su medida, el arco AC:

medida del $\angle a$ o $ABC = \frac{1}{2}$ arco AC.

2º *caso.* — *El centro está entre los dos lados.*

Trácese el diámetro BD. Resulta:

$\angle ABC = a + b$;

medida de $a = \frac{1}{2}$ arco AD;

medida de $b = \frac{1}{2}$ arco DC.

Sumando las dos últimas igualdades:

medida del $\angle ABC = \frac{1}{2}$(arco AD + arco DC) $= \frac{1}{2}$ arco AC.

3er *caso.* — *El centro es exterior al ángulo.*

Trácese el diámetro BD. Se tiene:

$\angle ABC = a - b$;

medida de $a = \frac{1}{2}$ arco AD;

medida de $b = \frac{1}{2}$ arco CD.

Restando las dos últimas igualdades:

medida del $\angle ABC = \frac{1}{2}$(arco AD − arco CD) $= \frac{1}{2}$ arco AC.

FATTA COMPROBACION

173. **Corolarios.** — 1º *Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.*

2º *Todo ángulo inscrito en un arco mayor que una semicircunferencia es agudo, y todo ángulo inscrito en un arco menor que una semicircunferencia es obtuso.*

3º *Todo los ángulos inscritos en un mismo arco son iguales.*

4º *Dos ángulos inscritos en cada uno de los arcos determinados por una cuerda de una circunferencia son suplementarios.*

174. **Arco capaz de un ángulo.** — Llámase *arco capaz* de un ángulo el arco que es el lugar geométrico de los vértices de todos los ángulos iguales al ángulo dado, y cuyos lados pasan por los extremos de la cuerda del arco; v. gr.: el arco ABC es el arco capaz de los ángulos B, B' y B'' (fig. 194).

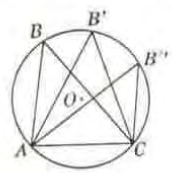


Fig. 194.

175. **Teorema.** — *La medida del ángulo semiinscrito en una circunferencia es la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

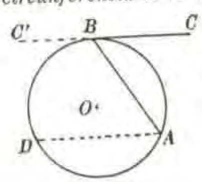


Fig. 195.

Hipót.: $\angle ABC$ semiinscrito en la $\odot O$.
Tesis: Medida del $\angle ABC = \frac{1}{2}$ arco AB.

Trácese $AD \parallel BC$ y prolónguese CB hasta C'. Se tiene:

arco AB = arco BD, por comprendidos entre $\parallel$s;
$\angle ABC = \angle BAD$, por alternos internos;
medida del $\angle BAD = \frac{1}{2}$ arco BD, por ser $\angle$ inscrito.

Sustituyendo en la última igualdad $\angle BAD$ y arco BD por sus iguales, $\angle ABC$ y arco AB, se tiene:

medida del $\angle ABC = \frac{1}{2}$ arco AB.

El $\angle$ semiinscrito ABC', suplemento de ABC, tiene por medida la mitad del arco ADB, que completa la circunferencia con el arco AB, o sea:

medida del $\angle ABC' = \frac{1}{2}$ arco ADB.

176. **Teorema.** — *La medida del ángulo exterior a una circunferencia es la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.*

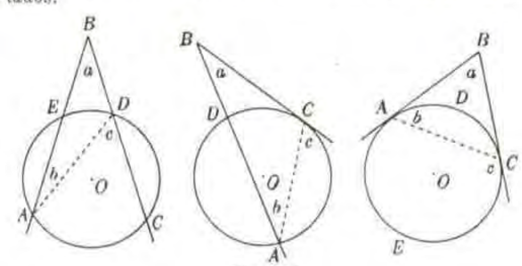


Fig. 196.

Hipót.: $\angle ABC$ exterior a la $\odot O$.
Tesis: Medida del $\angle ABC = \frac{1}{2}$ (arco AC − arco ED).

Pueden presentarse tres casos:

1er *caso.* — *Los dos lados son secantes.*

Unase el punto A con el punto D. Por el $\triangle ABD$, se tiene:

$a + b = c$, por ser el $\angle c$ exterior al $\triangle ABD$.
$\therefore a = c - b$, al restar b de los dos miembros.

Por ser inscritos los $\measuredangle c$ y b, la medida del $\angle a$ o ABC, es:

medida del $\angle ABC = \frac{1}{2}$(arco AC − arco ED).

Para los otros casos, análoga demostración daría por resultado:

2º *caso.* — ***Un lado** es secante y el otro tangente.*

medida del $\angle ABC = \frac{1}{2}$(arco AC − arco DC).

3er *caso.* — *Los dos lados son tangentes.*

medida del $\angle ABC = \frac{1}{2}$(arco AEC − arco ADC).

177. Teorema. — *La medida del ángulo interior a una circunferencia es la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y su prolongación.*

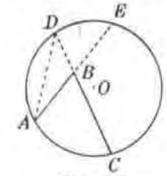


Fig. 197.

Hipót.:	$\angle ABC$ interior a la $\odot O$.
Tesis:	Medida del $\angle ABC = \frac{1}{2}$(arco AC + arco DE).

Prolónguense AB y CB hasta D y E, y únase D con A. Considerando el $\triangle ABD$, se tiene:

$\angle ABC = \angle D + \angle A$, por ser el $\angle ABC$ exterior al $\triangle$;
medida del $\angle D = \frac{1}{2}$ arco AC, por ser $\angle$ inscrito;
medida del $\angle A = \frac{1}{2}$ arco DE, por ser $\angle$ inscrito.

Sumando las dos últimas igualdades:

medida del $\angle ABC = \frac{1}{2}$(arco AC + arco DE).

178. Polígono inscrito en una circunferencia. — *Polígono inscrito* en una circunferencia es el que tiene todos sus vértices en la circunferencia y sus lados son cuerdas de la misma.

Dicha circunferencia es *circunscrita* al polígono.

179. Polígono circunscrito a una circunferencia. — *Polígono circunscrito* a una circunferencia es el que tiene todos sus lados tangentes a la circunferencia.

Dicha circunferencia es *inscrita* en el polígono.

180. Teorema. — *En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia los ángulos opuestos son suplementarios.*

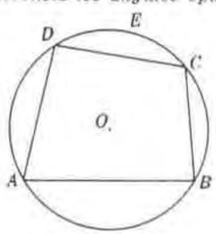


Fig. 198.

Hipót.:	$ABCD$ cuadril. inscrito.
Tesis:	$\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$.

Todos los ángulos de este cuadrilátero son inscritos; y dos ángulos opuestos, tales como A y C, tienen juntos por medida la mitad del arco BCD + mitad del arco DAB, o sea, media circunferencia. Luego, estos ángulos son suplementarios.

Del mismo modo se demostraría que los $\measuredangle B$ y D son suplementarios.

$$\therefore \angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°.$$

181. Recíproco. — *Todo cuadrilátero que tiene dos ángulos opuestos suplementarios es inscribible en una circunferencia* (fig. 198).

Hipót.:	$\angle A + \angle C = 180°$.
Tesis:	$ABCD$ es inscribible.

Si se describe una circunferencia por los tres puntos D, A y B, el $\angle A$ será inscrito y tendrá por medida la mitad del arco BED. El $\angle C$, suplemento de A, por hipótesis, tendrá por medida la mitad del arco restante DAB. Por tanto, el punto C debe estar situado en el arco BED.

182. Teorema. — *En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos.*

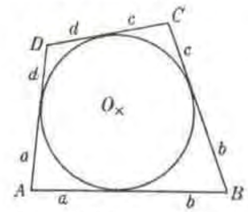


Fig. 199.

Hipót.:	$ABCD$ cuadrilátero circunscrito a la $\odot O$.
Tesis:	$AB + DC = AD + BC$.

Las tangentes a una circunferencia, trazadas desde un mismo punto, son iguales (Nº 146). Luego, se pueden formular las siguientes igualdades que, sumadas separadamente, dan:

$$\begin{array}{ll} AB = a + b & AD = a + d \\ DC = d + c & BC = b + c \\ \hline AB + DC = a + b + c + d & AD + BC = a + b + c + d \end{array}$$

$$\therefore AB + DC = AD + BC.$$

193

II. CONSTRUCCIONES

183. Perpendiculares. — 1º *Trazar una perpendicular en el extremo* B *de una recta* AB *que no se puede prolongar.*

Desde un punto cualquiera O, tomado fuera de la recta AB (fig. 200), trácese una circunferencia que pase por B, y también el diámetro CD que pasa por el punto C, intersección de la circunferencia con la recta AB. Uniendo luego los puntos B y D, se tiene la perpendicular pedida.

En efecto, el $\angle B$ es recto por estar inscrito en una semicircunferencia.

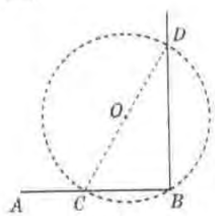


Fig. 200.

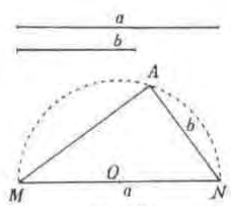


Fig. 201.

2º *Construir un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa y un cateto.*

Se construye una semicircunferencia con un diámetro MN, igual a la hipotenusa dada (fig. 201), y desde uno de los extremos N del diámetro, se traza una cuerda NA igual al cateto dado. Uniendo luego los puntos M y A, se tiene el triángulo pedido.

Efectivamente, el $\triangle MAN$ es rectángulo en A por estar el $\angle A$ inscrito en una semicircunferencia.

184. Tangentes. — 1º *Por un punto exterior a una circunferencia, trazar dos tangentes a esta circunferencia.*

Unase el centro O de la circunferencia con el punto dado A (fig. 202), y con AO por diámetro, descríbase una circunferencia auxiliar. Los puntos B y C de intersección de las dos circunferencias son los puntos de tangencia, y las tangentes son AB y AC.

En efecto, los $\measuredangle ABO$ y ACO son rectos como inscritos en una semicircunferencia. Luego, las rectas AB y AC son respectivamente perpendiculares a los radios OB y OC, y por tanto, tangentes a la $\odot O$.

194

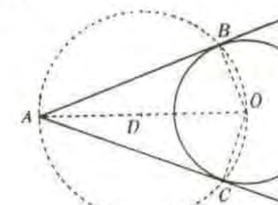


Fig. 202.

2º *Trazar las tangentes comunes a dos circunferencias.*

Hay que considerar dos casos: que las circunferencias estén situadas en un mismo lado de las tangentes, o en lados distintos. En el primer caso las tangentes se llaman *exteriores*, y en el segundo, *interiores*.

1º Sean las circunferencias O y O' (fig. 203).

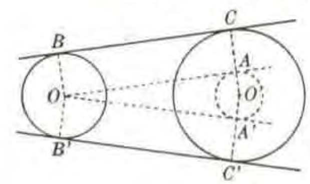


Fig. 203.

Desde el punto O' como centro, y con un radio $O'A$ igual a la diferencia de los radios de las circunferencias dadas, se describe una circunferencia auxiliar a la que se traza las tangentes OA y OA', conforme a lo explicado en el problema anterior. Luego, se trazan las rectas OB y $O'C \perp$ a OA, así como OB' y $O'C' \perp$ a OA', y se obtienen los puntos de tangencia B, C, B' y C' de las tangentes BC y $B'C'$.

En efecto, las rectas OB y AC, así como OB' y $A'C'$ son iguales por construcción, y respectivamente paralelas, por ser perpendiculares a las rectas OA y OA'. Luego, los cuadriláteros $OACB$ y $OA'C'B'$ son rectángulos. De donde, las rectas BC y $B'C'$ son respectivamente perpendiculares a los radios OB, $O'C$ y OB', $O'C'$, y por tanto, tangentes a las $\odot$ O y O'.

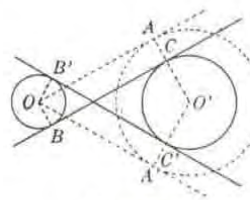


Fig. 204.

2º Sean las circunferencias O y O' (fig. 204).

Desde el punto O' como centro, y con un radio $O'A$ igual a la suma de los radios de las circunferencias dadas, descríbase una circunferencia auxiliar y háganse análogos razonamientos y construcciones a los del caso anterior; así se obtienen las tangentes interiores BC y $B'C'$.

185. Discusión del problema anterior. — 1º Si las dos circunferencias son *exteriores* una a otra, hay cuatro tangentes comunes: dos exteriores y dos interiores.

2º Si las dos circunferencias son *tangentes exteriormente*, hay tres tangentes comunes: dos exteriores y una interior.

3º Si las dos circunferencias son *secantes*, tan sólo hay dos tangentes comunes exteriores.

4º Si las dos circunferencias son *tangentes interiormente*, hay una sola tangente común exterior.

5º Si las dos circunferencias son *interiores* una a otra, no hay ninguna tangente común.

186. Observaciones. — 1ª Si las dos circunferencias tienen igual radio (fig. 205), el procedimiento indicado en el Nº 184 no es aplicable a las tangentes exteriores, porque la diferencia

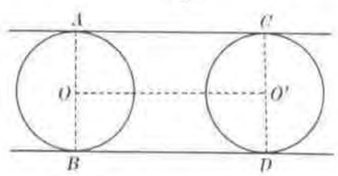


Fig. 205.

de los radios es nula. En este caso se trazan la línea de los centros OO' y dos diámetros AB y $CD \perp$ a OO'. Luego se unen de parte y otra los extremos de estos diámetros y se obtienen las tangentes exteriores AB y CD.

2ª Las correas de las poleas son aplicaciones de las tangentes comunes a dos circunferencias (fig. 206). Cuando el movimiento de las poleas ha de efectuarse en el mismo sentido, las correas

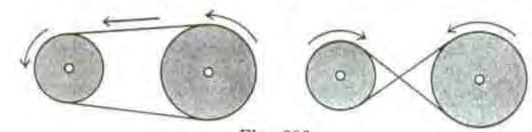


Fig. 206.

se colocan en posición de tangentes exteriores, y cuando dicho movimiento ha de ser en sentido contrario, las correas se disponen como tangentes interiores.

187. Circunferencias inscritas y circunscritas. — 1º *Inscribir una circunferencia en un triángulo.*

Sea el triángulo ABC (fig. 207).

Trácense las bisectrices AO, BO y CO que, según se demostró, concurren en un mismo punto O, equidistante de los tres lados, y también las perpendiculares iguales OD, OE y OF.

La circunferencia descrita desde O como centro y con un radio igual a estas perpendiculares es la circunferencia pedida.

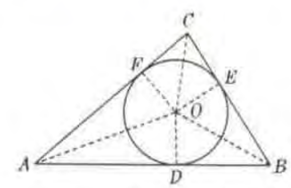


Fig. 207.

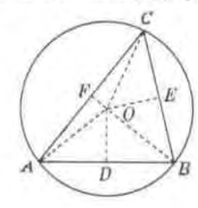


Fig. 208.

2º *Circunscribir una circunferencia a un triángulo.*

Sea el triángulo ABC (fig. 208).

Trácense las mediatrices DO, EO y FO, las cuales concurren en un mismo punto O equidistante de los tres vértices, y además las rectas iguales OA, OB y OC. La circunferencia de centro O descrita con un radio igual a estas rectas es la circunferencia pedida.

188. Arco capaz de un ángulo. — *Sobre una recta dada, considerada como cuerda, construir un arco capaz de un ángulo dado.*

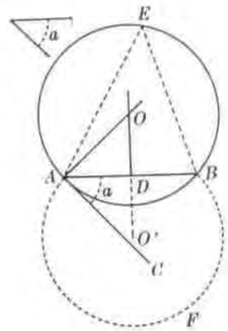


Fig. 209.

Sean la recta AB y el $\angle a$ (figura 209).

Trácense un $\angle BAC$ igual al $\angle a$, la mediatriz DO del segmento AB y la $\perp AO$ a la recta AC. Descríbase la $\odot O$ de radio OA, que también pasa por B, por ser A y B equidistantes de O. El arco AEB es el arco capaz pedido, ya que cualquier ángulo inscrito en él, como por ejemplo, el $\angle E$, es igual al $\angle a$, por tener la misma medida, o sea, la mitad del arco AB.

El arco AFB, simétrico del AEB, resuelve también el problema. Por tanto, hay dos soluciones: los arcos AEB y AFB.

EJERCICIO IX

1. Dada una circunferencia y en ella un ángulo inscrito, construir en la misma circunferencia un ángulo central de valor doble.

2. Dado un ángulo central, construir en la misma circunferencia un ángulo inscrito que tenga igual valor.

3. Dada una circunferencia, construir en ella un ángulo central, luego un ángulo semiinscrito de valor mitad, y otro ángulo semiinscrito de igual valor.

4. Construir un ángulo inscrito de 30° y otro semiinscrito igual, que abarque el mismo arco.

5. Demostrar que dos cuerdas iguales, que se cortan en una circunferencia, son las diagonales de un trapecio isósceles.

6. Trazar una circunferencia de 2.4 cm de radio, y en ella, un ángulo semiinscrito cuya cuerda tenga 32 mm; luego, con el transportador, medir el número de grados de este ángulo.

7. Con una recta de 4 cm como cuerda, construir un arco capaz de un ángulo de 42°.

8. Un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia tiene un ángulo agudo doble del otro; ¿cuántos grados de la circunferencia abarca cada uno de los tres ángulos?

9. Demostrar que todo paralelogramo inscrito en una circunferencia es un cuadrado o un rectángulo.

10. Demostrar que las tangentes comunes a dos circunferencias son iguales dos a dos (fig. 210).

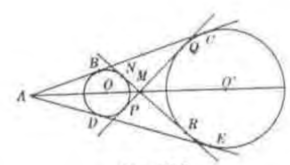


Fig. 210.

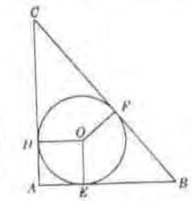


Fig. 211.

11. Demostrar que la línea de los centros de dos circunferencias es bisectriz de los ángulos formados por las tangentes comunes, tanto exteriores como interiores (fig. 210).

12. Demostrar que el diámetro de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo es igual a la suma de los catetos menos la hipotenusa (fig. 211).

13. Dadas dos rectas perpendiculares OX y OY, y dos puntos A y B en una de ellas, trazar una circunferencia que pase por estos dos puntos y sea tangente a la otra recta.

14. Demostrar que dos cuerdas perpendiculares determinan en una circunferencia cuatro arcos tales que la suma de dos opuestos es igual a una semicircunferencia.

15. En una circunferencia se trazan dos cuerdas paralelas desiguales AB y CD; demostrar que el cuadrilátero $ABDC$ es un trapecio isósceles.

16. Trazar una circunferencia equidistante de tres puntos dados no alineados, y que sea tangente a una recta dada.

17. Demostrar que las tangentes trazadas por los vértices de un rectángulo inscrito en una circunferencia determinan un rombo.

18. Un cuadrilátero inscrito en una circunferencia tiene el ángulo A doble del ángulo C y su diagonal AC es un diámetro; calcular los ángulos de este cuadrilátero.

19. Demostrar que si en una circunferencia se trazan dos diámetros, las cuerdas opuestas que unen sus extremos son paralelas.

20. Construir un triángulo cuya base AB mida 45 mm, y las alturas correspondientes a los otros dos lados, 3.5 y 4 cm respectivamente.

21. ¿Qué posición relativa ocupan dos circunferencias que tienen tres tangentes comunes? ¿cuatro tangentes comunes? ¿dos tangentes comunes?

22. ¿Qué arco recorre en un segundo un punto cualquiera de la Tierra al girar alrededor de su eje? ¿Y la punta del horario de un reloj?

23. Demostrar que el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo equilátero es igual a $\frac{1}{3}$ de la altura del triángulo.

24. Dos poleas de 15 y 20 cm de radio respectivamente y cuya línea de los centros mide 50 cm están unidas exteriormente por una correa bien estirada; dibujar la figura a la escala de $\frac{1}{10}$. Repetir la construcción colocando la correa al interior.

25. Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia y sus ángulos A y B valen respectivamente 60° y 70°; calcular la medida de los ángulos centrales AOB, BOC y COA (fig. 212).

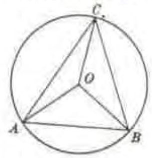


Fig. 212.

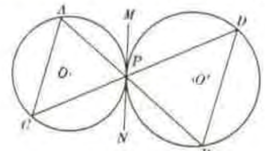


Fig. 213.

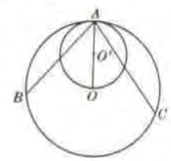


Fig. 214.

26. En las circunferencias tangentes O y O' (fig. 213) se trazan las rectas AB y CD, y la tangente común MN; probar que AC es paralela a BD.

27. En una circunferencia de radio OA (fig. 214) se traza otra de diámetro OA; demostrar que la segunda es el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas trazadas desde A en la primera.

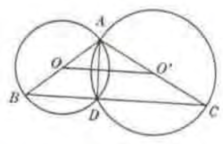


Fig. 215.

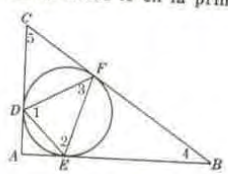


Fig. 216.

28. Demostrar que si por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias secantes se trazan dos diámetros, la recta que une los extremos de éstos pasa por el otro punto de intersección y es igual al doble de la línea de los centros (fig. 215).

29. En la figura 216 el ángulo A es recto y el ángulo 1 vale 70°; calcular los ángulos 5, 4, 2 y 3.

197

CAPITULO X

FIGURAS SEMEJANTES

I. GENERALIDADES

189. Segmentos proporcionales. — *Dos segmentos son proporcionales a otros dos cuando las razones de sus medidas son iguales.*

Sean dos segmentos a y b (fig. 217), que miden respectivamente 2 cm y 3 cm, y otros dos c y d, que miden 6 cm y 9 cm.

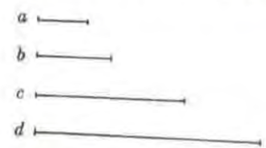


Fig. 217.

La razón de los dos primeros segmentos es:

$$\frac{a}{b}=\frac{2}{3};$$

y la de los dos segundos:

$$\frac{c}{d}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

Luego, las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales a $\frac{2}{3}$. Por tanto, son iguales entre sí y forman la siguiente proporción:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

A los *segmentos proporcionales* se les pueden aplicar todas las propiedades de las proporciones.

8. Demostrar que la suma del lado del cuadrado y del lado del triángulo equilátero inscritos en una circunferencia de radio r, equivale aproximadamente a la semicircunferencia πr.

9. En una circunferencia de 3 cm de radio se traza una cuerda de 3 cm; calcular la cuerda que corresponde al arco mitad; ídem, la que corresponde al arco doble.

10. En el Nº 289 consta que el lado del polígono regular inscrito, de 96 lados, mide .065438; calcular el lado del polígono regular inscrito de 192 lados.

11. Calcular el radio de un arco de 26° 40′ 12″ que mide 3.5 cm.

12. Una curva de ferrocarril de 360 m de largo es un arco de circunferencia de 500 m de radio; calcular el ángulo central correspondiente a la curva; ídem, el formado por las tangentes a la curva, trazadas desde sus extremos.

13. Calcular el perímetro de un octágono regular inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.

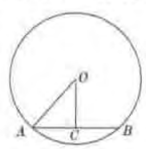


Fig. 305.

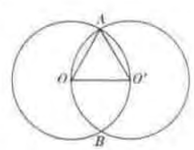


Fig. 306.

14. Demostrar que la apotema de un polígono regular inscrito, en función del radio y del lado es igual a $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2}$ (fig. 305).

15. Cada una de dos circunferencias iguales, de 3.6 cm de radio, pasa por el centro de la otra; calcular la longitud de cada uno de los arcos interceptados AOB y $AO'B$ (fig. 306).

16. Si el diámetro de las ruedas de una bicicleta mide 75 cm, ¿cuántas vueltas da ésta al recorrer una distancia de 24 km?

17. Si las ruedas de un carro dan 540 vueltas al recorrer 1 890 m, ¿cuál es su diámetro?

18. Un abanico abierto tiene la forma de un sector circular de 135°; calcular su contorno, sabiendo que mide 28 cm de radio.

19. ¿Con qué velocidad por segundo gira un punto del ecuador terrestre, dado que el radio ecuatorial de la Tierra mide 6 375 km?

20. Rectificar gráficamente una circunferencia de 1.5 cm de radio.

21. Calcular el radio de una circunferencia, sabiendo que el lado del octágono regular inscrito en ella mide 2 cm.

22. ¿Cuántos grados tiene un arco de 8 cm cuyo radio mide 5 cm?

CAPITULO XVI

AREAS DE LAS SUPERFICIES PLANAS

I. AREAS DE LOS POLIGONOS

291. Definiciones. — *Llámase* **área** *de una figura la medida de su superficie.*

Con frecuencia se confunden las palabras *área* y *superficie*, a pesar de que tienen significado diferente. La palabra *superficie* se refiere a la forma y extensión de la figura considerada, mientras que la palabra *área* indica el número que representa la medida de la superficie. Sin embargo, en la práctica suele usarse casi exclusivamente la palabra *área*.

La unidad principal de las medidas de superficie es el *metro cuadrado* (m^2), que es un cuadrado de 1 m de lado.

Para facilitar la medida de superficies mayores que el metro cuadrado, se emplean el *decámetro cuadrado* (dam^2), el *hectómetro cuadrado* (hm^2) y el *kilómetro cuadrado* (km^2), que tienen respectivamente 1 dam, 1 hm y 1 km de lado.

Tratándose de la medida de superficies más pequeñas que el metro cuadrado, se emplean el *decímetro cuadrado* (dm^2), el *centímetro cuadrado* (cm^2) y el *milímetro cuadrado* (mm^2), que tienen respectivamente 1 dm, 1 cm y 1 mm de lado.

Cada unidad de superficie equivale a 100 unidades de la inmediata inferior, y a una centésima parte de la inmediata superior. Por eso se dice que las unidades de superficie van de 100 en 100.

Dos figuras son *iguales* cuando pueden coincidir por superposición.

Dos figuras son *equivalentes* cuando tienen igual área sin tener la misma forma.

292. Teorema. — *Las áreas de dos rectángulos de igual base son proporcionales a sus alturas.*

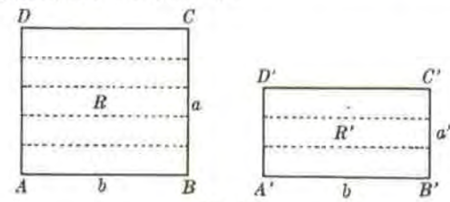


Fig. 307.

Hipót.:	b base de los ▭R y R'.
Tesis:	$\dfrac{\square R}{\square R'} = \dfrac{a}{a'}$.

1º *Las alturas son conmensurables.*

Divídanse las alturas en partes iguales a la unidad común. Suponiendo que esa medida común esté contenida 5 veces en el $\square R$ y 3 veces en el $\square R'$, se tiene:

$$\frac{a}{a'} = \frac{5}{3}.$$

Por los puntos divisorios trácense paralelas a las bases. Los dos rectángulos quedan así descompuestos respectivamente en 5 y 3 rectángulos iguales, por tener iguales las bases y las alturas.

Por tanto: $$\frac{R}{R'} = \frac{5}{3}.$$

Luego: $$\frac{R}{R'} = \frac{a}{a'}.$$

2º *Las alturas son inconmensurables.*

Si una unidad de medida está contenida un número entero de veces en la primera altura y no lo está en la segunda, parte de la segunda altura queda sin medir. En tal caso se puede escoger otra unidad más pequeña que esté contenida un número entero de veces en la primera altura, de suerte que la parte de la segunda que queda sin medir sea más reducida. Así se puede llegar a un residuo menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea. Por tanto, este residuo tiende a cero, a medida que aumenta el número de partes. En el límite, se puede escribir:

$$\frac{R}{R'} = \frac{a}{a'}.$$

199

293. Corolario. — *Las áreas de dos rectángulos de igual altura son proporcionales a sus bases,* porque se pueden considerar las alturas como bases y las bases como alturas.

294. Teorema. — *Las áreas de dos rectángulos cualesquiera son proporcionales a los productos de sus bases por sus alturas.*

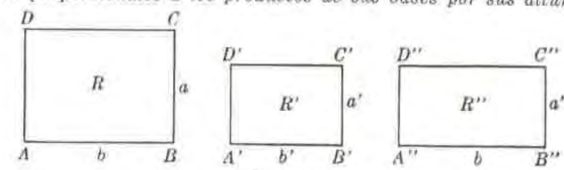


Fig. 308.

Hipót.:	b base de los ▭R y R'',
	a' altura de los ▭R'' y R'.
Tesis:	$\dfrac{\square R}{\square R'} = \dfrac{b \times a}{b' \times a'}$.

De lo demostrado en el teorema anterior, se deduce:

$$\frac{R}{R''} = \frac{a}{a'} \quad \text{y} \quad \frac{R''}{R'} = \frac{b}{b'}.$$

Multiplicando miembro a miembro y simplificando:

$$\frac{R \times R''}{R'' \times R'} = \frac{R}{R'} = \frac{b \times a}{b' \times a'}.$$

295. Teorema. — *El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

Sean un $\square R$, cuyas dimensiones son b y a, y otro $\square R'$, unidad de medida, con dimensiones 1 y 1 (fig. 309).

Según el teorema anterior, se tiene:

$$\frac{R}{R'} = \frac{b \times a}{1 \times 1}.$$

De donde se deduce:

$$R = b \times a.$$

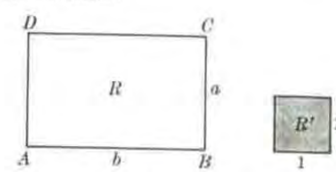


Fig. 309.

296. Corolario. — *El área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado.*

Efectivamente, llamando l el lado, resulta:

$$\text{Area} = l \times l = l^2.$$

297. Teorema. — *El área de un paralelogramo es igual al producto de su base por su altura.*

Sean el $\square ABCD$ y las $\perp AF$ y BE a las bases (fig. 310).

Los $\triangle$ rectángulos AFD y BEC son iguales, por tener las hipotenusas AD y BC y los catetos AF y BE respectivamente iguales. Luego, el $\square ABCD$ es equivalente al $\square ABEF$. Por tanto, su área es igual a la del rectángulo, o sea:

$$\text{Area} = AB \times BE = ba.$$

298. Corolarios. — 1º *Dos paralelogramos de igual base e igual altura son equivalentes.*

2º *Dos paralelogramos de igual base son proporcionales a sus alturas, y dos paralelogramos de igual altura son proporcionales a sus bases.*

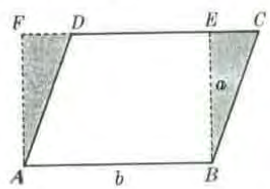


Fig. 310.

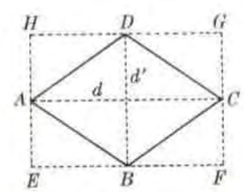


Fig. 311.

299. Teorema. — *El área de un rombo es igual al semiproducto de sus diagonales.*

El rombo es un paralelogramo; por tanto, se puede calcular su área como la de esta figura; pero generalmente es más fácil calcularla por medio de sus diagonales.

Sean el rombo $ABCD$ y sus diagonales d y d' (fig. 311).

Por los vértices del rombo, trácense perpendiculares a las diagonales. Se forma así el $\square EFGH$, doble del rombo $ABCD$, cuyas dimensiones son respectivamente iguales a sus diagonales.

Luego: $$\text{Area} = \frac{EF \times BD}{2} = \tfrac{1}{2}dd'.$$

200

300. Teorema. — *El área de un triángulo es igual al semiproducto de su base por su altura.*

Sean el $\triangle ABC$ y la altura $BD = h$ (fig. 312).

Por los vértices B y C trácense paralelas a los lados opuestos; se obtiene así el $\square ACEB$, compuesto de dos $\triangle ABC$ y BCE, iguales, por tener sus lados respectivamente iguales. Luego, el área del $\triangle ABC$ es igual a la mitad del área del $\square ACEB$, o sea:

$$\text{Area} = \frac{AC \times BD}{2} = \tfrac{1}{2}bh.$$

301. Corolarios. — 1º *Dos triángulos de igual base e igual altura son equivalentes.*

2º *Dos triángulos de igual base son proporcionales a sus alturas, y dos triángulos de igual altura son proporcionales a sus bases.*

3º *El área de un triángulo rectángulo es igual al semiproducto de sus catetos.*

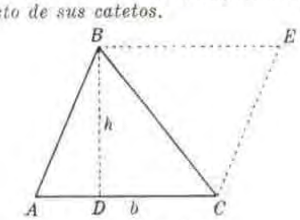


Fig. 312.

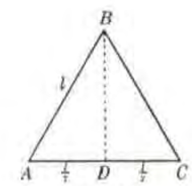


Fig. 313.

302. Problema. — *Calcular el área del triángulo equilátero en función del lado.*

Sean el $\triangle$ equilátero ABC y la altura BD (fig. 313).

Según el teorema anterior se tiene:

$$\text{Area} = \frac{AC \times BD}{2}.$$

Del $\triangle$ rectángulo ADB se deduce:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4};$$

$$BD = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \text{Area} = \frac{l \times l\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

303. Problema. — *Calcular el área de un triángulo en función de sus lados.*

En la fórmula $\frac{1}{2}bh$ del área del triángulo, sustitúyase h por su valor, en función de los lados (Nº 228), y se obtiene:

$$\text{Area} = \tfrac{1}{2}bh = \frac{b}{2} \times \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$\text{Area} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Nota. — Téngase presente que en las fórmulas referentes a las áreas, p suele representar el semiperímetro.

304. Problema. — *Calcular el área de un triángulo en función de sus lados y del radio de la circunferencia circunscrita.*

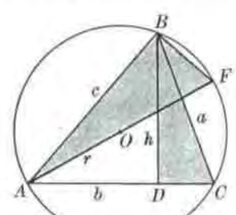


Fig. 314.

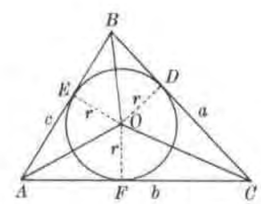


Fig. 315.

Sean el $\triangle ABC$ y la ⊙ circunscrita O (fig. 314).

Trácense la altura BD, el diámetro AF y la cuerda BF. Se forman así dos ⊿ rectángulos ABF y BDC, cuyos ∡ en F y en C son iguales, por estar inscritos en un mismo arco $ACFB$. Luego, estos triángulos rectángulos son semejantes, por tener un ángulo agudo igual. De donde:

$$\frac{BC}{AF} = \frac{BD}{AB}; \quad \text{o sea:} \quad BC \times AB = AF \times BD.$$

$$\therefore ac = 2rh \quad \text{y} \quad h = \frac{ac}{2r}.$$

Sustitúyase, en la fórmula $\frac{1}{2}bh$, h por este último valor:

$$\text{Area} = \frac{b}{2} \times \frac{ac}{2r} = \frac{abc}{4r}.$$

201

305. Problema. — *Hallar el área de un triángulo en función de sus lados y del radio de la circunferencia inscrita.*

Sean el $\triangle ABC$ y la ⊙ inscrita O (fig. 315).

Unase el centro O con los vértices del triángulo y trácense los radios OD, OF y OE. Resultan así tres ⊿ BCO, ACO y ABO cuya suma da el área del $\triangle$ total ABC. Por tanto:

$$\text{Area} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2} \times r = pr.$$

306. Teorema. — *El área de un trapecio es igual al producto de la semisuma de sus bases por su altura.*

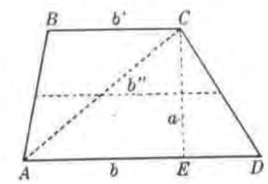


Fig. 316.

Sean el trapecio $ABCD$, b y b' sus bases y a su altura (fig. 316).

Trazando la diagonal AC, el trapecio queda dividido en dos ⊿ ADC y BCA de igual altura que el trapecio, y cuyas bases respectivas son las del trapecio. Por tanto, el área del trapecio es igual a la suma de las áreas de los triángulos, o sea:

$$\text{Area} = \frac{ba}{2} + \frac{b'a}{2} = \frac{b+b'}{2} \times a.$$

Nota. — Como la semisuma de las bases de un trapecio es igual a la base media (Nº 116), designando ésta por b'', se tiene:

$$\text{Area} = b''a.$$

Luego, *el área de un trapecio es igual al producto de la base media por la altura.*

307. Problema. — *Calcular el área de un polígono cualquiera.*

Para hallar el área de un polígono cualquiera se lo descompone en figuras cuya área se sabe calcular, particularmente en triángulos y trapecios, y se suman las áreas parciales. Esta descomposición es muy empleada en agrimensura.

II. AREAS DE LOS POLIGONOS REGULARES Y DE LAS FIGURAS CIRCULARES

308. **Teorema.** — *El área de un polígono regular es igual al semiproducto del perímetro por la apotema.*

Sean el polígono regular $ABCDEF$, l el lado, a la apotema y n el número de lados (fig. 317).

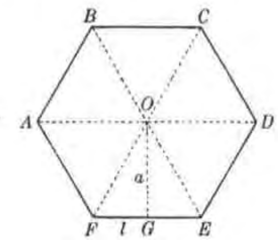


Fig. 317.

Uniendo con el centro O los vértices del polígono, resultan tantos triángulos iguales como lados hay en el polígono; y como el área de cada uno de ellos es igual al semiproducto del lado del polígono por la apotema, se tiene:

$$\text{Area} = \frac{la}{2} \times n = \frac{la \times n}{2} = \frac{ln \times a}{2}.$$

Siendo ln igual al perímetro $2p$, resulta:

$$\text{Area} = \frac{2p \times a}{2} = pa.$$

309. **Teorema.** — *El área del círculo es igual al semiproducto de la circunferencia por el radio, o bien, al producto de π por el cuadrado del radio.*

Se puede considerar el círculo como un polígono regular cuyo número de lados aumenta indefinidamente. En el límite, el perímetro del polígono se confunde con la circunferencia, y la apotema, con el radio. Entonces, designando por C la circunferencia, la fórmula pa del área del polígono regular se transforma en:

$$\text{Area} = \frac{Cr}{2} = \frac{2\pi r \times r}{2} = \pi r^2.$$

202

310. **Area de un sector circular.** — *El área de un sector circular de n grados se obtiene multiplicando $\frac{\pi r^2}{360}$ por n.*

En efecto, el área de un sector de 1° es igual a $\frac{\pi r^2}{360}$.

Por tanto, para obtener el área de un sector de $n°$ basta multiplicar por n el área del sector de 1°, o sea:

$$\text{Area} = \frac{\pi r^2}{360} \times n = \frac{\pi r^2 n}{360}.$$

311. **Area de un segmento circular.** — En las figuras 318 y 319 se ve claramente que el área de un *segmento circular* es igual a la *diferencia* o a la *suma* de las áreas del sector correspondiente al arco del segmento, y del triángulo que tiene por base la cuerda del segmento y por vértice el centro del círculo, según que el arco respectivo sea *menor* o *mayor* que la semicircunferencia.

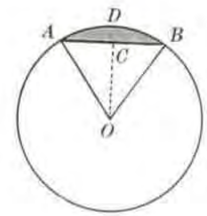


Fig. 318.

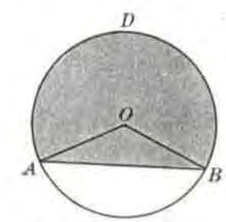


Fig. 319.

Efectivamente, según la figura 318, se tiene:

$$\text{Area } ABD = \text{área } OBDA - \text{área } ABO.$$

Y según la figura 319, resulta:

$$\text{Area } ABD = \text{área } OBDA + \text{área } ABO.$$

312. **Area de una corona circular.** — *Llámase corona circular la parte de círculo comprendida entre dos circunferencias concéntricas.*

El área de una corona circular es igual a la diferencia entre las áreas de los dos círculos que la limitan.

En efecto, si del círculo exterior de la figura 320 se resta el interior, queda la corona circular. Por tanto, designando por r y r' los radios respectivos, se tiene:

$$\text{Area} = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi(r^2 - r'^2).$$

313. Area de un trapecio circular. — *Trapecio circular es la parte de corona circular que corresponde a un ángulo central determinado.*

El área de un trapecio circular es igual a la diferencia entre las áreas de los dos sectores circulares que lo limitan.

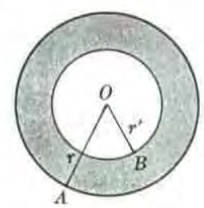


Fig. 320.

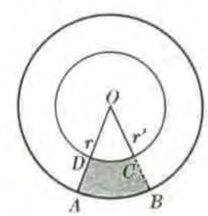


Fig. 321.

En efecto, si del sector OAB de la figura 321 se resta el ODC, queda el trapecio $ABCD$. Luego, llamando r y r' los radios y n el número de grados del ángulo central, resulta:

$$\text{Area} = \frac{\pi r^2 n}{360} - \frac{\pi r'^2 n}{360} = \frac{\pi n}{360}(r^2 - r'^2).$$

III. APLICACIONES

314. Problema. — *Calcular el área de un terreno triangular cuyos lados miden respectivamente*: a = 61 m, b = 87 m, c = 56 m.

El semiperímetro p es igual a:

$$\frac{61 + 87 + 56}{2} = 102 \text{ m.}$$

Aplicando la fórmula del área del triángulo en función de los lados, resulta (Nº 303):

$$\text{Area} = \sqrt{102(102-61)(102-87)(102-56)};$$

$$\text{Area} = \sqrt{102 \times 41 \times 15 \times 46} = 1\,698.70 \text{ m}^2.$$

315. Problema. — *Hallar el área de un octágono regular inscrito en una circunferencia de* 4 cm *de radio.*

Las fórmulas del lado l y de la apotema a, en función del radio, son (Nº 271):

$$l = r\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad a = \frac{r\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Sustitúyanse estos valores en la fórmula del área de un polígono regular:

$$\text{Area} = pa = 4r\sqrt{2-\sqrt{2}} \times \frac{r\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};$$

$$\text{Area} = 2r^2\sqrt{2-\sqrt{2}} \times \sqrt{2+\sqrt{2}} = 2r^2\sqrt{2};$$

$$\text{Area} = 2 \times 4^2 \times 1.414 = 45.25 \text{ cm}^2.$$

316. Problema. — *Calcular el área de un segmento circular correspondiente a un ángulo central de* 60°, *y cuyo radio mide* 5 cm.

Sea el segmento circular ABD (fig. 318).

Según lo explicado en el Nº 311, el área del segmento ABD es igual al área del sector $OBDA$ menos la del $\triangle ABO$. Ahora bien, por ser el ángulo central de 60°, el $\triangle ABO$ es equilátero. Por tanto, se tiene (Nº 273):

$$AB = r \quad \text{y} \quad CO = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Area } OBDA = \frac{\pi r^2 n}{360} = \frac{3.1416 \times 5^2 \times 60}{360} = 13.09 \text{ cm}^2;$$

$$\text{Area } ABO = \frac{bh}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5^2 \times 1.732}{4} = 10.83 \text{ cm}^2;$$

$$\text{Area } ABD = 13.09 - 10.83 = 2.26 \text{ cm}^2.$$

317. Observaciones. — 1ª Las fórmulas que se acaban de deducir para el cálculo de las áreas de las figuras planas son generales e independientes de la unidad lineal empleada para medir las dimensiones. Si dicha unidad es el metro, el centímetro, etc., las áreas resultan expresadas en metros cuadrados, centímetros cuadrados, etc.

Por tanto, si las dimensiones que intervienen en una misma fórmula se refieren a unidades diferentes, *hay que reducirlas primero a una misma unidad* con el fin de evitar equivocaciones.

EJEMPLO: *Calcular el área de un triángulo de* 3 dm *de base y* 28 cm *de altura.*

Reduciendo la altura a decímetros, o la base a centímetros, resulta:

$$\text{Area} = \frac{3 \times 2.8}{2} = 4.20 \text{ dm}^2;$$

$$\text{Area} = \frac{30 \times 28}{2} = 420 \text{ cm}^2.$$

2ª Si se conoce el área de una superficie y uno de los factores que la determinan, se puede calcular el otro factor, deduciéndolo de la fórmula del área.

EJEMPLOS: 1º *Calcular la apotema de un decágono regular inscrito en una circunferencia de* 4.5 cm *de radio, sabiendo que su área es de* 59.51 cm².

Lado del decágono regular inscrito, en función del radio (Nº 277):

$$l = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Semiperím.: $p = 5l = \frac{5r}{2}(\sqrt{5} - 1);$

$$p = \frac{5 \times 4.5}{2}(2.236 - 1) = 13.91 \text{ cm}.$$

De la fórmula Area $= pa$, se deduce:

$$a = \frac{\text{Area}}{p} = \frac{59.51}{13.91} = 4.28 \text{ cm}.$$

2º *Hallar el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero cuya área es de* 17.65 cm².

Sustitúyanse en la fórmula $\frac{1}{2}bh$ del área del triángulo, b y h por los valores respectivos del lado y de la altura del triángulo equilátero, en función del radio (Nº 275):

$$\text{Area} = \frac{bh}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \times \frac{3r}{2};$$

o sea: $$17.65 = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2 \times 1.732}{4}.$$

Despéjese r^2 y extráigase la raíz cuadrada:

$$r^2 = \frac{17.65 \times 4}{3 \times 1.732};$$

$$r = \frac{2\sqrt{17.65}}{\sqrt{3 \times 1.732}} = 3.68 \text{ cm}.$$

204

EJERCICIO XVI

1. Calcular el área de una acera de 1.50 m de ancho que rodea una plaza rectangular de 80 m de largo por 55 m de ancho.

2. Hallar las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que su área es de 10 cm² y la razón de sus dimensiones es $\frac{4}{5}$.

3. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4.5 cm, y su área es 13.50 cm²; calcular los tres lados.

4. Si la escala de un plano es de 2 mm por kilómetro, ¿cuál es el área de un terreno en forma de trapecio cuyas bases y altura miden, en el plano, respectivamente 4.5, 3 y 2.8 mm?

5. Calcular el perímetro de un terreno cuadrado de 7 482.25 m².

6. Dos cuadrados tienen 4 y 5 cm de lado respectivamente; calcular el lado del cuadrado equivalente a su suma; ídem, a su diferencia.

7. Calcular el área de un triángulo cuyos lados miden respectivamente 13, 14 y 15 cm.

8. Calcular el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo del problema anterior.

9. Calcular el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo del Nº 7.

10. ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide $3\sqrt{2}$ cm?

11. Demostrar que el área de un polígono circunscrito a una circunferencia es igual al semiproducto de su perímetro por el radio de la circunferencia.

12. Dados los tres lados de un triángulo, 6, 8 y 10 cm respectivamente, calcular el área del triángulo formado por sus tres alturas.

13. En un círculo de 78.54 cm² y por un punto situado a 3 cm del centro, se trazan un diámetro y una cuerda perpendicular a él; calcular la longitud de ambas rectas.

14. La diagonal mayor de un rombo mide 5.7 cm, y la menor es igual al lado; calcular el área de este rombo.

15. Un campo cuadrangular tiene dos lados paralelos de 215 m y 175 m respectivamente, y sus otros dos lados forman con la base ángulos de 90° y 60°; calcular su área.

16. En un trapecio rectángulo, la base menor tiene 3 cm, el lado oblicuo a las bases 4 cm, y uno de los ángulos 45°; calcular el área.

17. Demostrar que toda recta que pasa por el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo determina dos trapecios iguales (fig. 322).

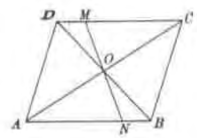


Fig. 322.

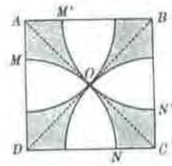


Fig. 323.

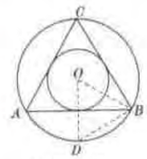


Fig. 324.

18. Calcular el área de la parte sombreada de la figura 323, sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado de $4\sqrt{2}$ cm de lado.

19. Dado un triángulo equilátero de 4 cm de lado, calcular el área de la corona que forman las circunferencias inscrita y circunscrita (fig. 324).

20. En un trapecio isósceles, las bases y los otros lados miden respectivamente 6, 2 y 4 cm; calcular el área del trapecio.

21. Calcular el área del círculo inscrito en un triángulo equilátero cuya área mide 1 dm^2.

22. Calcular el área del círculo circunscrito a un triángulo cuyos lados miden respectivamente 4, 5 y 6.5 cm.

23. Calcular el número de grados del arco de un sector circular de 10 cm^2 de área y 4 cm de radio.

24. Calcular el radio de la circunferencia circunscrita a un decágono regular en función del lado $l = 2.5$ cm del mismo decágono.

25. El área de una corona circular es de 10 cm^2, y la diferencia de los radios 1 cm; calcular los radios de las dos circunferencias.

26. Calcular el radio de un sector circular de 25° cuya área mide 15 cm^2.

27. Hallar el área de un segmento circular de radio r subtendido por un lado del triángulo equilátero inscrito en el círculo de mismo radio (fig. 325).

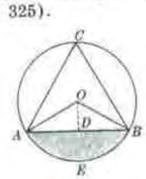


Fig. 325.

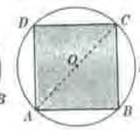


Fig. 326.

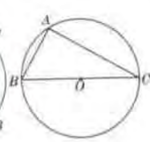


Fig. 327.

28. Con un tronco cilíndrico de madera de 40 cm de diámetro se labra una viga de sección transversal cuadrada, la mayor posible; calcular el área de la sección (fig. 326).

29. Dos cuerdas trazadas desde un mismo punto de una circunferencia a los extremos de uno de sus diámetros miden respectivamente 5 y 8 cm; calcular el área del círculo (fig. 327).

30. El área de un trapecio circular de 45° es de 30 cm^2; calcular sus dos radios, sabiendo que el menor es $\frac{2}{3}$ del mayor.

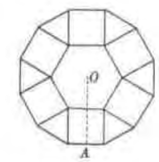


Fig. 328.

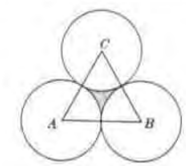


Fig. 329.

31. Sobre cada uno de los lados de un hexágono regular se construye un cuadrado y se unen consecutivamente los 12 vértices exteriores; calcular el área del dodecágono regular resultante, en función del lado l del hexágono (fig. 328).

32. Tres círculos de igual radio son tangentes dos a dos; hallar, en función del radio común, el área de la superficie comprendida entre ellos (fig. 329).

BLOQUE

II

CAPITULO
XVIII y XIX

GEOMETRIA

PLANA

MARTINEZ CABALLERO

18

ROTACIÓN

A. ROTACIÓN: En una hoja de papel dibujamos el triángulo ABC o cualquier otra figura y además una recta $\overleftrightarrow{x}$ en la que señalamos un punto cualquiera O (Figura A).

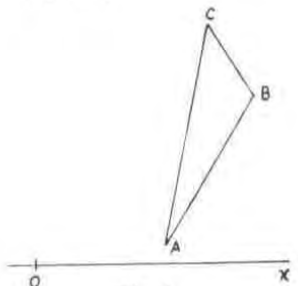


Fig. A

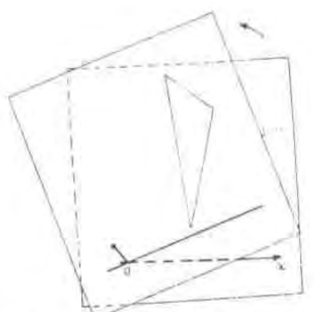


Fig. B

Después, colocamos esta hoja sobre otra, donde antes dibujamos también la recta OX, y, poniendo la punta de un lápiz o de un alfiler en el punto O, hacemos girar la hoja sobrepuesta en el sentido que se quiera. De esta manera habremos efectuado un movimiento de rotación o giro con el triángulo ABC en torno del punto O (Figura B).

Con la ayuda de papel calca, se pueden dibujar fácilmente las posiciones ABC inicial y A'B'C' del triángulo, como se ve en la figura C.

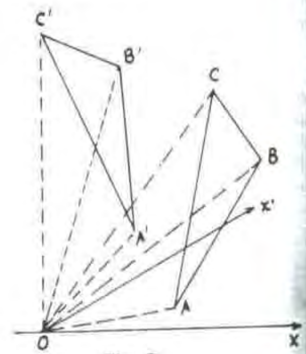


Fig. C

a) El punto O fijo es el centro de rotación.

b) Los puntos de la figura móvil, de ambas posiciones inicial y final, que coinciden mediante el movimiento, se llaman homólogos o correspondientes. Por ejemplo A y A', B y B', C y C'.

c) Dos puntos homólogos cualesquiera son equidistantes del centro de rotación. Por ejemplo: $\overline{OA} = \overline{OA'}$, $\overline{OB} = \overline{OB'}$, $\overline{OC} = \overline{OC'}$.

d) Los puntos de la figura móvil recorren arcos de circunferencia cuyo centro es el mismo centro de rotación. Por ejemplo: $\widehat{AA'}$, $\widehat{BB'}$, $\widehat{CC'}$.

e) Los radios que van del centro de rotación a dos puntos homólogos determinan ángulos centrales iguales. Por ejemplo:

$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \widehat{COC'}$$

El valor de cualquiera de estos ángulos es la *amplitud de rotación o ángulo de giro.*

También tiene la misma medida el ángulo $\widehat{xOx'}$, formado por las semirrectas $0x$ y Ox'.

Entonces, quiere decir que en la figura C:

$$\text{Ángulo de giro} = \widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} =$$

$$= \widehat{COC'} = \widehat{xOx'}$$

Por tanto, puede afirmarse que todos los puntos giran con igual amplitud en torno del centro de rotación.

> *En general, a los elementos de las figuras que coinciden mediante una rotación se les llama homólogos.*

De esta manera, en la figura: A y A', B y B', C y C' son puntos homólogos.

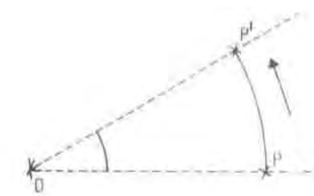
$\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$, $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$ son lados homólogos.

Δ ABC y Δ A'B'C' son figuras homólogas.

El sentido de la rotación comúnmente se indica con una flecha, y se considera negativo cuando sigue el movimiento de las manecillas del reloj y positivo en caso contrario.

Consideremos varios ejemplos:

1. Rotación de un punto en torno de otro. Ejecutar con el punto P una rotación de 30° en torno de O, en sentido positivo.



Se trazan OP y un ángulo de 30° en sentido positivo. Después, con un arco de radio OP se determina P'.

2. Rotación de un segmento en torno de un punto.

Ejecutar con el segmento AB una rotación de 60° en torno de O, en sentido negativo.

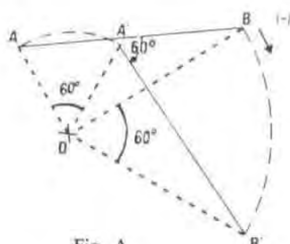


Fig. A

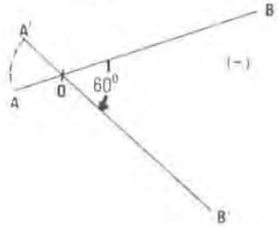


Fig. B

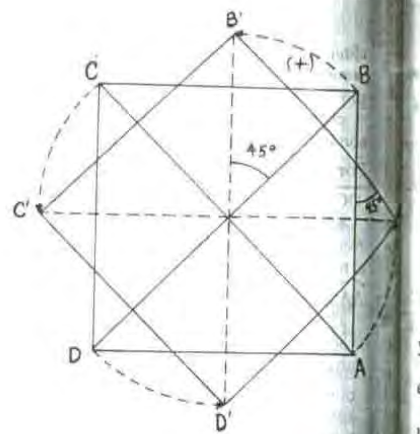
En la figura A el punto O es exterior al segmento, en tanto que en la figura B se encuentra en el segmento.

El procedimiento de trazo consiste en realizar la rotación con los extremos A y B, para obtener sus homólogos A' y B', como se explicó en el caso anterior, quedando así determinado A' B'.

Se puede observar que los segmentos homólogos AB y A' B', forman también un ángulo de 60° que es el ángulo de giro.

3. Rotación de una figura cualquiera en torno de un punto.

1. En el sentido positivo y con un ángulo de giro de 45°, hacer una rotación con el cuadrado ABCD, considerando como centro de rotación el punto donde se cortan sus diagonales.



Obsérvese que $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ forman también un ángulo de 45°. En general, cualquier par de rectas homólogas forman un ángulo igual al *ángulo de giro.*

2. Efectuar con el rombo ABCD una rotación de 90° en torno de O en sentido negativo.

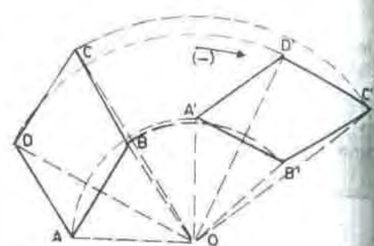


Fig. A

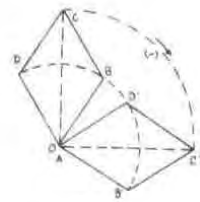


Fig. B

En la figura A, O está fuera de la figura y en la figura B coincide con el vértice A.

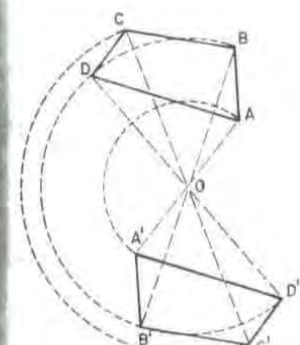
El trazo se hace en la forma explicada en los ejemplos anteriores.

3. Con el cuadrilátero ABCD hacer una rotación de 180° en cualquier sentido en torno de un punto O situado fuera de la figura.

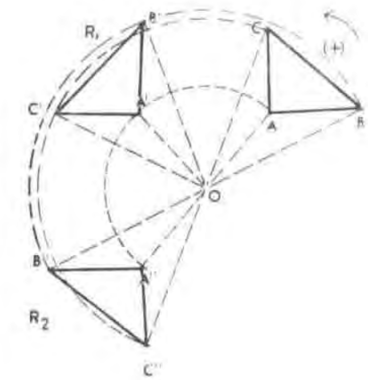
Como el ángulo de giro equivale a media circunferencia, los puntos homólogos quedan situados sobre la misma recta, equidistantes del centro de rotación. Así, por ejemplo A y A' están sobre $\overleftrightarrow{AOA'}$, de modo que $\overline{OA} = \overline{OA'}$.

En este caso, se puede observar que existe paralelismo entre cada par de lados homólogos.

Es decir, $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$, $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$, $\overline{AD} \parallel \overline{A'D'}$.



Como puede apreciarse en la figura que sigue, dos rotaciones sucesivas ejecutadas con el triángulo ABC, lo llevan a la posición final A''B''C'', pasando por la posición intermedia A'B'C'.



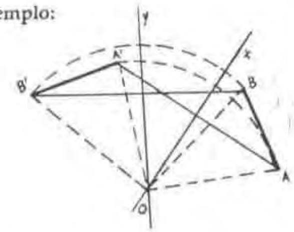
Resulta evidente que Δ ABC puede pasar, mediante un solo movimiento, a la posición Δ A''B''C''.

Si llamamos R_1 al primer movimiento, R_2 al segundo, y R al que puede sustituir a los otros dos, decimos que R es el producto de R_1 y R_2.

> De aquí se puede afirmar: *Dos rotaciones sucesivas pueden reemplazarse por una sola.*

La perpendicular mediatriz del segmento que une un par de puntos homólogos pasa por el centro de rotación.

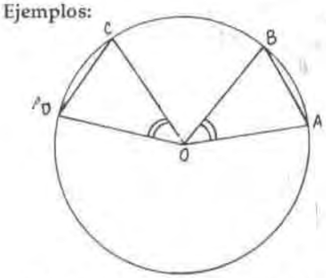
Ejemplo:



Siendo AB y A'B', segmentos homólogos y 0 el centro de rotación, al unir A con A' y B con B' se observa que sus perpendiculares mediatrices $0x$ y $0y$ pasan por el centro de rotación.

18.4. APLICACIONES IMPORTANTES. Mediante la rotación se pueden probar algunas proposiciones geométricas.

Ejemplos:



1. En una circunferencia, ángulos centrales congruentes corresponden a cuerdas congruentes.

Siendo $\widehat{A0B} \cong \widehat{C0D}$, luego $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ porque coinciden mediante una rotación en torno de 0.

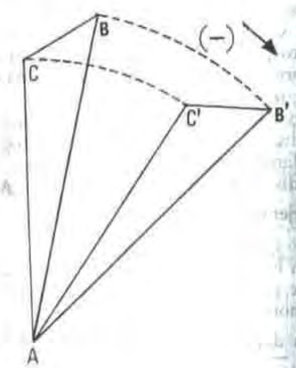
2. En una circunferencia, a ángulos centrales congruentes corresponden arcos congruentes.

En la misma figura anterior:

Si $\widehat{A0B} \cong \widehat{C0D}$, entonces $AB \cong CD$ por coincidir mediante una rotación en torno de 0.

Ejercicio XCV

A. Considerando que ABC y A'B'C' son las posiciones inicial y final, respectivamente, de un triángulo, después de una rotación en torno de A, contestar las preguntas que siguen:



a) ¿Cuánto mide el ángulo de giro?

b) ¿Cuánto miden $\widehat{BAB'}$ y $\widehat{CAC'}$?

c) ¿Cuál es la medida en grados de $\widehat{CC'}$ y $\widehat{BB'}$?

d) ¿Cuál es el punto homólogo de C?

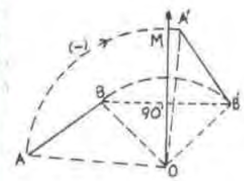
e) ¿Qué ángulo es homólogo de $\hat{B}$?

f) Escribir listas de parejas de puntos, lados y ángulos homólogos.

g) Por coincidir en todos sus puntos, ¿cómo son entre sí Δ ABC y Δ AB'C'?

h) ¿Qué sentido tiene la rotación?

B. Dados los segmentos homólogos AB y A'B', contestar las siguientes preguntas:



a) ¿Cuánto miden $\widehat{A0A'}$ y $\widehat{B0B'}$?

b) Por coincidir en todos sus puntos, ¿cómo son entre sí $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$?

c) ¿Dónde corta a $\overline{BB'}$, la recta $\overleftrightarrow{0M} \perp \overline{BB'}$?

d) ¿Cuánto mide el ángulo de giro?

C. Trazar un triángulo equilátero de 3 cm por lado y un punto fuera de él. Después hacer en cualquier sentido una rotación de 120°.

D. Trazar un paralelogramo cualquiera y tomando como centro de rotación el punto donde se cortan sus diagonales, ejecutar en cualquier sentido una rotación de 100°.

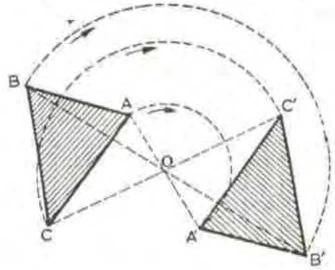
E. Con un rombo cualquiera hacer tres rotaciones sucesivas de 90°, en torno de uno de sus vértices, en sentido positivo.

F. Con un trapecio cualquiera hacer una rotación de 180° en torno de un punto situado fuera de él, en sentido negativo.

19

SIMETRÍA Y PERPENDICULARIDAD

19.1. SIMETRÍA CENTRAL. Sean dos figuras ABC y A'B'C' tales que una rotación de 180° en torno de O lleve la primera a coincidir con la segunda.



En casos como éste, se dice que las figuras ABC y A'B'C' están situadas simétricamente con respecto al centro de rotación O o, más brevemente, que son simétricas respecto al punto O, el cual recibe el nombre de *centro de simetría.*

Los elementos homólogos de una y otra figura son también simétricos con respecto a dicho centro.

Los puntos simétricos se encuentran a igual distancia del centro de simetría y situados en una misma recta que pasa por dicho centro, como los puntos A y A'.

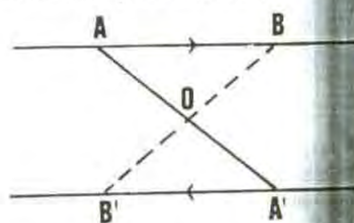
Esto significa que:

En $\overleftrightarrow{AOA'}$ $\overline{OA} = \overline{OA'}$; en $\overleftrightarrow{BOB'}$ $\overline{OB} = \overline{OB'}$; y en $\overleftrightarrow{COC'}$, $\overline{OC} = \overline{OC'}$

Dos segmentos homólogos cualesquiera son paralelos entre sí y, en consecuencia, son paralelas las rectas que contienen a esos segmentos.

Ejemplo:

Sean los segmentos AB y A'B' simétricos con respecto al centro O.



Puede observarse que dos segmentos simétricos respecto a un punto tienen la misma dirección y sentidos contrarios. Por tanto:

a) Dos rectas simétricas con respecto a un punto, son paralelas y tienen la misma dirección.

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$$

b) Dos semirrectas simétricas con respecto a un centro son paralelas, tienen la misma dirección y sentidos contrarios.

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$$

c) Dos segmentos simétricos con respecto a un punto son congruentes y paralelos.

$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$$
$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$$

En general, dos figuras simétricas con respecto a un punto son congruentes, puesto que una coincide con la otra después de una rotación de 180°.

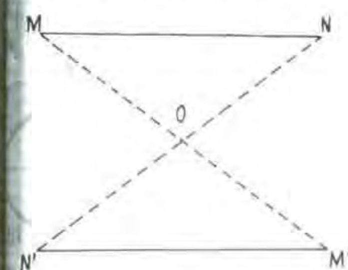
19.2. TRAZO DE FIGURAS SIMÉTRICAS. Consideremos varios ejemplos:

1. Trazar el punto simétrico de A respecto a 0.

El procedimiento consiste en trazar una recta que, partiendo de A, pase por 0.

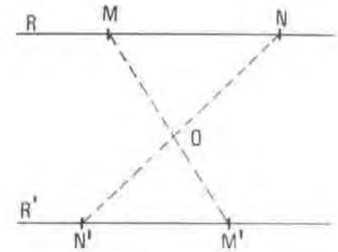
Con una distancia igual a $\overline{0A}$, se determina al punto A', simétrico de A.

2. Trazar el segmento simétrico de $\overline{MN}$ respecto al punto 0, situado fuera de él.



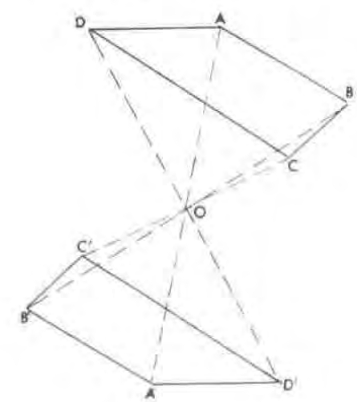
Se trazan los puntos simétricos de los dos extremos M y N. Se unen entre sí, mediante un segmento M'N', que es el segmento simétrico buscado.

3. Trazar la recta simétrica de R respecto al punto 0, exterior a ella.



Señalamos dos puntos cualquiera M, N sobre R. Se trazan sus simétricos M' y N' con respecto a 0. La recta R' que pasa por M' y N' es la recta simétrica buscada.

4. Trazar el polígono simétrico de ABCD con respecto al punto 0.



Se trazan los puntos simétricos de cada uno de los vértices, tomando el punto 0 como centro de simetría y se unen por medio de segmentos en el mismo orden que en la figura dada.

19.3. CENTRO DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA. Se dice que un punto es centro de simetría de una figura, cuando a cada punto de la figura le corresponde otro punto de la misma que le es simétrico con respecto a dicho centro. Así, por ejemplo:

a) El centro de simetría de una circunferencia es el centro de ella, puesto que a cada uno de los puntos de la circunferencia le corresponde otro de la misma (situado al otro extremo del diámetro que pasa por ese punto) que le es simétrico con respecto al centro. (Figura A.)

b) El centro de simetría de un paralelogramo es el punto de intersección de sus diagonales. (Figura B.)

c) El centro de simetría de un hexágono regular es el centro de la circunferencia circunscrita. (Figura C.)

d) El centro de simetría de una elipse es el punto de intersección de sus diámetros principales. (Figura D.)

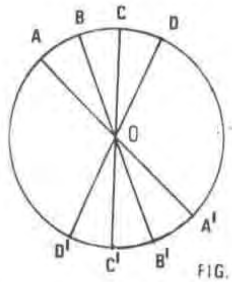


FIG. A

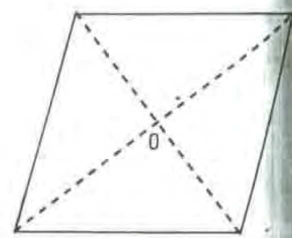


FIG. B

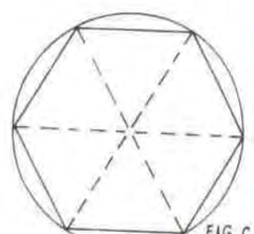


FIG. C

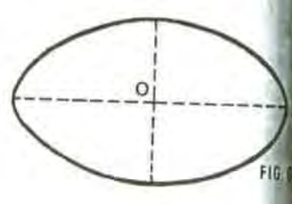
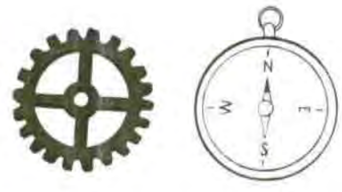


FIG. D

En la naturaleza y en el arte encontramos muchas figuras que presentan simetría central.

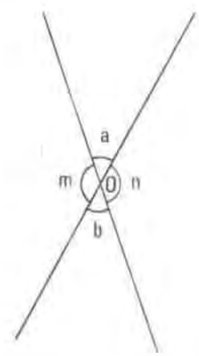
Ejemplos:



19.4. APLICACIONES IMPORTANTES. Mediante la simetría central se pueden probar algunas proposiciones geométricas.

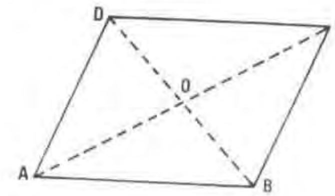
Ejemplos:

1. Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.



$\hat{a} \cong \hat{b}$, $\hat{m} \cong \hat{n}$; por ser simétricos respecto al punto 0.

2. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.



Como 0, punto de intersección de las diagonales, es el centro de simetría del paralelogramo ABCD, entonces:

$$\hat{A} \cong \hat{C} \text{ y } \hat{B} \cong \hat{D}$$

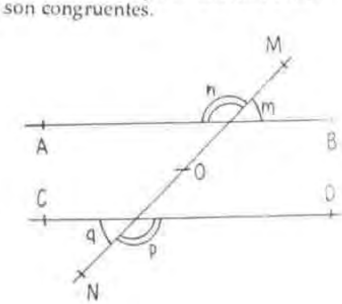
por ser simétricos respecto al punto 0.

3. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
Como 0 es el centro de simetría,

$$\overline{AB} \cong \overline{DC} \text{ y } \overline{BC} \cong \overline{DA}$$

por ser simétricos respecto al punto 0.

4. Si dos paralelas son cortadas por una secante, los ángulos alternos externos son congruentes.



Sean $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{MN}$ transversal a las mismas. Las rectas AB y CD por ser paralelas son simétricas respecto al punto medio 0 situado sobre la recta MN.

Entonces, podemos señalar los siguientes pares de ángulos homólogos:

$$\hat{p} \text{ y } \hat{n}$$
$$\hat{m} \text{ y } \hat{q}$$

Por ser homólogos son congruentes, por tanto

$$\hat{p} \cong \hat{n}$$

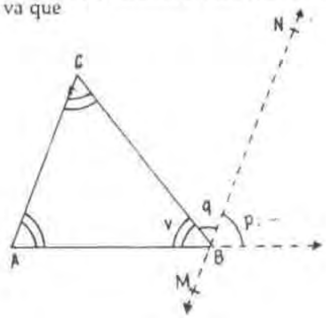
$$\hat{m} \cong \hat{q}$$

Análogamente, se puede comprobar la siguiente proposición:

Si dos paralelas son cortadas por una secante, los ángulos alternos internos son congruentes.

5. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos.

Si en el triángulo ABC se traza por B la recta MN paralela al lado AC se observa que



$$\hat{p} + \hat{v} + \hat{q} = 180°$$

por formar un ángulo llano.

Además:

$$\hat{A} \cong \hat{p}$$

por correspondientes.

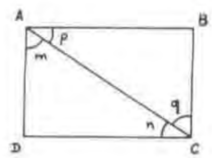
$\hat{C} \cong \hat{q}$ por alternos internos.

Sustituyendo p y q por sus iguales A y C, tenemos

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

6. La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360°.

En el cuadrilátero ABCD se traza una diagonal AC que lo divide en dos triángulos ACD y ACB. Se consideran los ángulos $\hat{p}, \hat{m}, \hat{q}, \hat{n}$ de dichos triángulos.



Se tiene $\quad \hat{A} = \hat{p} + \hat{m}$ y $\hat{C} = \hat{q} + \hat{n}$

Además $\quad \hat{p} + \hat{q} + \hat{B} = 180°$

y $\quad \hat{m} + \hat{n} + \hat{D} = 180°$

Porque la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°. Entonces

$$\hat{p} + \hat{q} + \hat{B} + \hat{m} + \hat{n} + \hat{D} = 180° + 180° = 360°$$

Como $\hat{p} + \hat{m} = \hat{A}$ y $\hat{n} + \hat{q} = \hat{C}$.

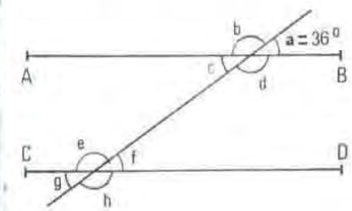
En consecuencia,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$$

Estas proposiciones probadas por simetría y las estudiadas anteriormente, nos permiten resolver algunos problemas relativos al cálculo de ángulos de las figuras.

Ejemplos:

1. En la figura siguiente, calcular el valor de los ángulos que se indican, si $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\hat{a} = 36°$



$\hat{b} = 180° - 36° = 144°$ por suplementarios.

$\hat{c} = 36°$ por ser opuesto por el vértice a a.

$\hat{d} = 144°$ por ser opuesto por el vértice a b.

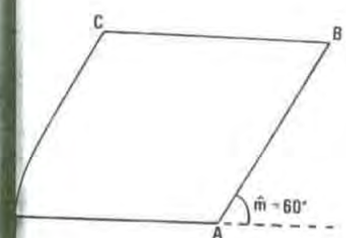
$\hat{f} = 36°$ por correspondiente de $\hat{a}$.

$\hat{e} = 144°$ por correspondiente de $\hat{b}$.

$\hat{g} = 36°$ por correspondiente de $\hat{c}$.

$\hat{h} = 144°$ por correspondiente de $\hat{d}$.

2. ¿Cuánto miden los ángulos interiores del paralelogramo si $m = 60°$?



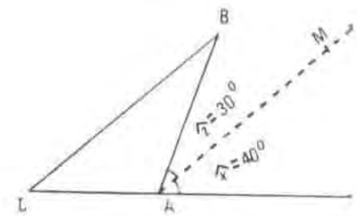
$\hat{B} = 60°$ por alterno interno de $\hat{m}$.

$\hat{D} = 60°$ por correspondiente de $\hat{m}$.

$\hat{A} = 120°$ por ser suplemento de $\hat{m}$.

$\hat{C} = 120°$ por ser el opuesto de $\hat{A}$.

3. Siendo $\hat{x} = 40°$ y $\hat{z} = 30°$, ¿cuánto mide cada uno de los tres ángulos interiores del Δ ABC si $\overline{AM} // \overline{CB}$?



$\hat{A} = 180° - (40° + 30°) = 110°$.

$\hat{B} = 30°$ por alterno interno de $\hat{z}$.

$\hat{C} = 40°$ por correspondiente de $\hat{x}$.

A. Trazar el centro de simetría de un cuadrado y de un rombo.

B. Trazar tres figuras distintas que tengan centro de simetría y señalar con una letra dicho centro.

C. Investigar por qué se puede considerar que el centro de simetría de una figura es su centro de gravedad.

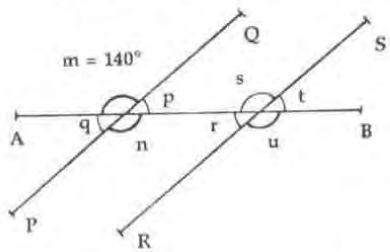
D. Trazar un triángulo isósceles y su simétrico respecto a un punto situado fuera de él.

E. Trazar un paralelogramo cualquiera y su simétrico respecto a uno de sus vértices.

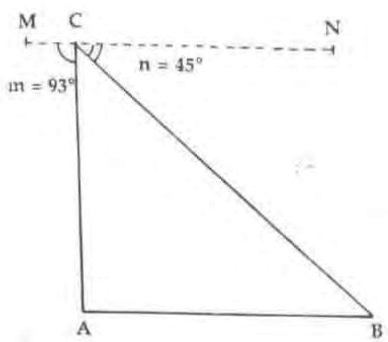
F. Trazar dos rectas paralelas y una secante a ellas. En seguida, marcar el punto medio de la secante en la parte comprendida entre ambas paralelas, y explicar por qué son iguales los ángulos alternos–internos, alternos–externos y correspondientes.

G. En cada figura calcular el valor de los ángulos que se piden.

Si $\overline{PQ} // \overline{RS}$, ¿cuánto miden los ángulos n, p, q, r, s, t, u?

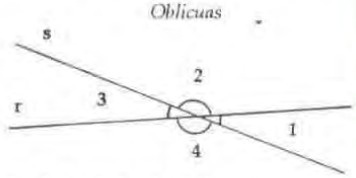


Si $\overline{MN} // \overline{AB}$, ¿cuánto miden los ángulos A, B y C? ¿Cuánto suman A, B y C?



19.5. PERPENDICULARIDAD. Si dos rectas se cortan, forman cuatro ángulos adyacentes dos a dos. Figura A.[1]

Oblicuas

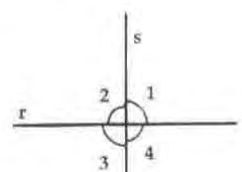


$\hat{1}$ y $\hat{2}$; $\hat{2}$ y $\hat{3}$; $\hat{3}$ y $\hat{4}$; $\hat{4}$ y $\hat{1}$ son adyacentes.

Figura A

Cuando estos ángulos son iguales, reciben el nombre de *ángulos rectos*, y se dice que las dos rectas secantes son *perpendiculares*.

Perpendiculares



$\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4}$

Figura B

Luego, puede afirmarse que dos rectas son *perpendiculares* cuando al cortarse forman ángulos rectos; en caso contrario son *oblicuas*.

De esta manera, podemos afirmar que:

[1] Ángulos adyacentes son los que tienen el vértice y un lado común y los otros dos lados están en la misma recta, pero en sentidos opuestos.

$\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{s}$ son *oblicuas* en figura A.

$\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{s}$ son perpendiculares en la figura B, lo que puede indicarse escribiendo

$$\overleftrightarrow{r} \perp \overleftrightarrow{s}.$$

Además:

Si $\overleftrightarrow{r} \perp \overleftrightarrow{s}$.

entonces

$$\overleftrightarrow{s} \perp \overleftrightarrow{r'}$$

esto significa que, en la *relación de perpendicularidad* se cumple la *propiedad simétrica.*

Sin embargo, no se cumplen las propiedades *reflexiva* y *transitiva*, como puede observarse en los siguientes ejemplos:

Si $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$, no puede afirmarse que $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{m}$ o $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{n}$; es decir, que no es posible considerar que una recta sea perpendicular a sí misma. (Figura A.)

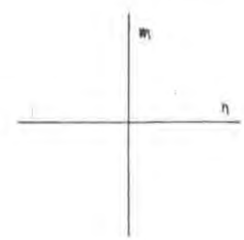


Figura A

Tampoco se cumple la propiedad transitiva, puesto que:

Si $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$ y $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{p}$ resultaría absurdo concluir que: $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{p}$ (absurdo), pues las rectas n y p mediante una traslación son paralelas, como puede verse. (Figura B.)

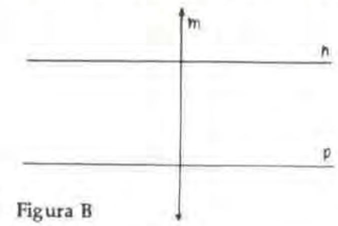


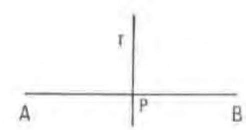
Figura B

Esto último conduce a la propiedad siguiente:

> *Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.*

Otras propiedades importantes son:

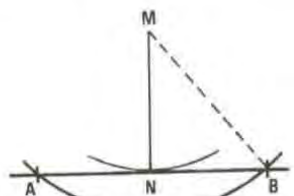
> **1.** *Por un punto de una recta no pasa más que una y sólo una perpendicular a ella.*



Porque, dados una recta AB y un punto cualquiera P de ella, sólo una recta r puede cortarla determinando 4 ángulos iguales.

Esto se comprueba fácilmente si doblamos una hoja de papel y después volvemos a doblarla, de manera que el doblez anterior coincida consigo mismo.

> **2.** *Si desde un punto exterior a una recta se trazan a ésta la perpendicular y una oblicua, la perpendicular es menor que la oblicua.*

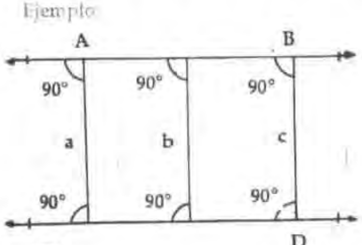


Siendo $\overline{MN} \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $\overline{MB}$ oblicua a $\overleftrightarrow{AB}$, se observa que $\overline{MN} < \overline{MB}$. Por ello, la distancia de un punto a una recta es la medida del segmento perpendicular trazado del punto a la recta.

Así, en la figura anterior, la medida de $\overline{MN}$ es la distancia de M a la recta AB.

Análogamente, la distancia entre dos paralelas es la medida de cualquier segmento perpendicular a las mismas y comprendido entre ellas.

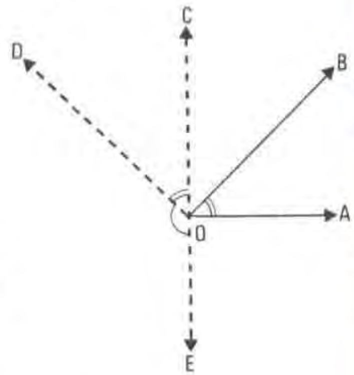
Ejemplo



Siendo $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, la distancia entre las paralelas es la medida de cualquier segmento perpendicular como *a*, *b*, *c*, ... etcétera, comprendido entre ellas.

> **3.** *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son congruentes o suplementarios.*

Ejemplo



Sean $\widehat{A0B}$, $\widehat{C0D}$ y $\widehat{D0E}$

donde $\overline{0A} \perp \overline{CE}$

y $\overline{0B} \perp \overline{0D}$

Puede observarse que, mediante una rotación de 90°, coinciden $\widehat{A0B}$ y $\widehat{C0D}$.

Entonces: $\widehat{A0B} \cong \widehat{C0D}$.

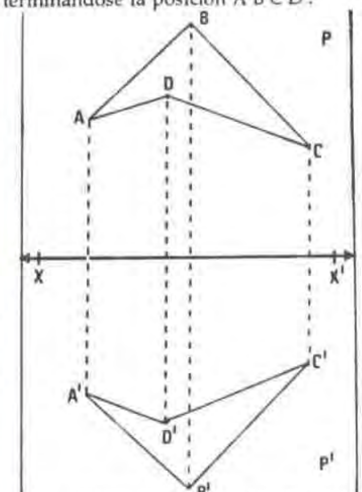
Además:

$$\widehat{C0D} + \widehat{D0E} = 180°.$$

por formar un ángulo llano.

Luego, $\widehat{A0B} + \widehat{D0E} = 180°$ porque $\widehat{C0D}$ puede substituirse por $\widehat{A0B}$, ya que son congruentes.

Si dibujamos en una hoja de papel una figura como el polígono ABCD y una recta XX', y después hacemos un doblez con la hoja, precisamente sobre la recta, la figura habrá girado 180° en torno de la recta XX', determinándose la posición A'B'C'D'.[1]



El movimiento de rotación equivale a un giro de 180° del semiplano P en torno de XX' para situarse sobre el semiplano P'.

En esta forma se mantiene invariable la recta XX'.

Se dice que ABCD y A'B'C'D' son figuras simétricas con respecto a la recta XX'. A esta recta se le llama *eje de simetría*. Por tanto,

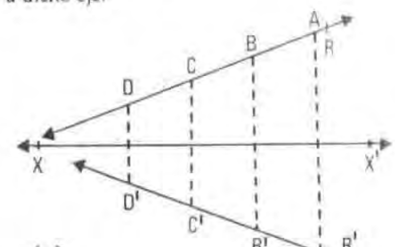
> *Dos figuras son simétricas con respecto a un eje, cuando pueden coincidir mediante un giro de 180° en torno de dicho eje.*

Si se tienen dos figuras simétricas con respecto a un eje, dos puntos homólogos cualesquiera quedarán a igual distancia del eje y sobre una perpendicular a él. Esos puntos son simétricos entre sí.

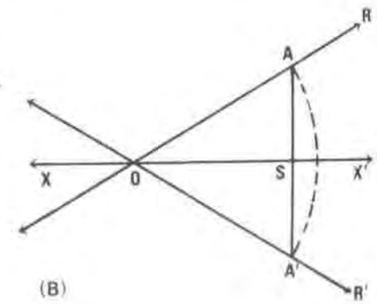
Los puntos A y A', B y B', C y C', D y D' son simétricos.

Análogamente, el lado AB es simétrico del lado A'B'; el ángulo A es simétrico del ángulo A'; ... etcétera.

Sean dos rectas R y R' no paralelas al eje XX' y simétricas respecto a dicho eje.



(A)



(B)

[1] Por medio de papel calca, podemos trazar A'B'C'D'.

A cada punto de una de las rectas le corresponde otro punto de la otra recta que le es simétrico.

Como cada par de puntos simétricos (A y A', B y B', C y C', D y D',..., etc.) está equidistante del eje, al prolongarse ambas rectas en el sentido conveniente, se irán acercando mutuamente, hasta llegar el momento en que ambas distancias sean cero; y en ese instante las dos rectas se cortan en un mismo punto del eje.

Esto es: *Dos rectas no paralelas, simétricas con respecto a un eje, se cortan en un mismo punto de dicho eje.*

Como resultado de ello, los ángulos que ambas rectas forman con el eje serán simétricos y, por tanto, congruentes. Luego,

Dos rectas no paralelas, simétricas con respecto a un eje, forman con él ángulos congruentes.

Si consideramos ahora (figura B) el ángulo A0A', formado por las dos rectas simétricas R y R', notamos que el eje de simetría XX' es la bisectriz de dicho ángulo.

En consecuencia,

La bisectriz de un ángulo es su eje de simetría.

También puede observarse que

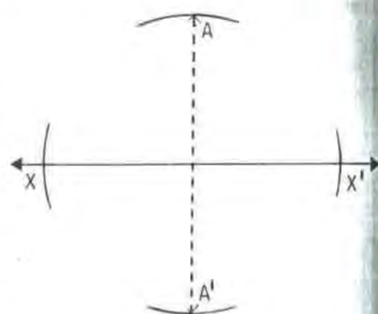
El eje de simetría es perpendicular mediatriz del segmento que determinan dos puntos simétricos.

Por ejemplo, en la figura $\overleftrightarrow{XX'} \perp \overline{AA'}$ y $\overline{AS} \cong \overline{A'S}$.

19.8. TRAZO DE FIGURAS SIMÉTRICAS RESPECTO A UN EJE.

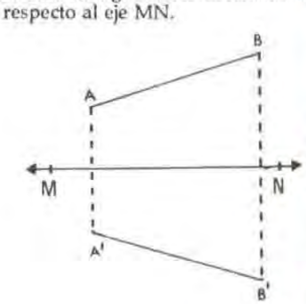
Sean los siguientes ejemplos:

1. Trazar el punto simétrico de A con respecto al eje XX'.



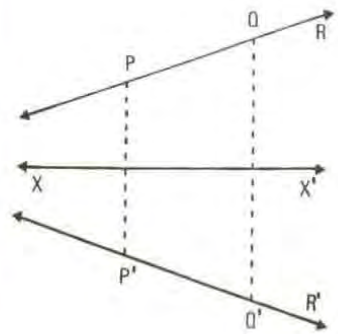
El procedimiento es muy sencillo: basta trazar desde el punto A una perpendicular al eje y situar sobre su prolongación el punto simétrico A'. Para ello, se pueden utilizar la escuadra y el compás, de modo que A y A' queden equidistantes de XX'.

2. Trazar el segmento simétrico de $\overline{AB}$ con respecto al eje MN.



Se trazan los puntos simétricos de los extremos de $\overline{AB}$. Después se unen entre sí y se obtiene el segmento simétrico buscado $\overline{A'B'}$.

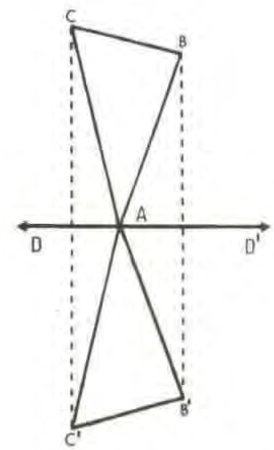
3. Trazar la recta simétrica de R respecto al eje XX'.



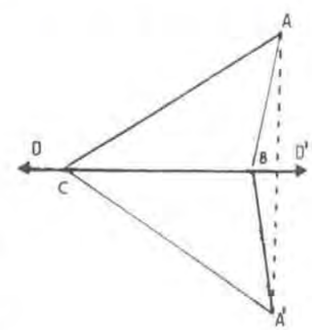
Basta considerar sobre $\overleftrightarrow{R}$ dos puntos cualesquiera como P y Q para determinar después sus simétricas P' y Q'.

La recta R' que pasa por P' y Q' es la recta simétrica de R.

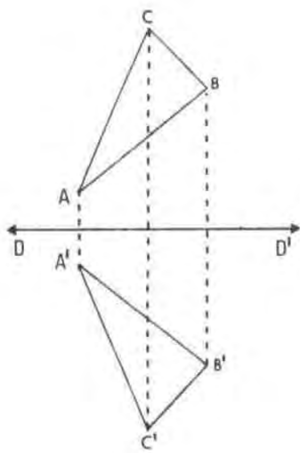
4. Trazar el triángulo simétrico de ABC con respecto al eje DD'. Obsérvense las tres posibilidades siguientes:



El procedimiento de trazo consiste en obtener los puntos simétricos de los vértices, como se explicó anteriormente, y después unirlos de manera adecuada para determinar la figura simétrica buscada.



217



19.9. EJE DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA. Una recta es eje de simetría de una figura, cuando las dos partes en que la divide pueden hacerse coincidir mediante una rotación de 180° en torno de dicha recta.

Ejemplos:

1. El eje de simetría de un triángulo isósceles es la bisectriz del ángulo desigual. (Figura A.)

2. Las bisectrices de los ángulos de un triángulo equilátero son sus ejes de simetría. (Figura B.)

3. El diámetro es eje de simetría del círculo. (Figura C.)

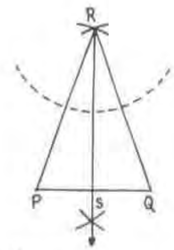


Figura A

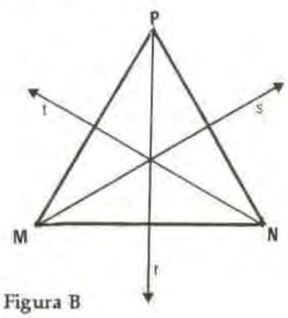


Figura B

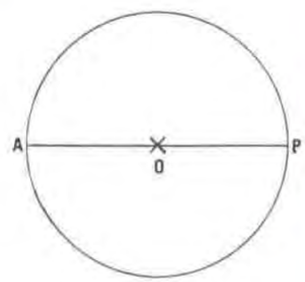


Figura C

4. Los diámetros principales son ejes de simetría de una elipse. (Figura D.)

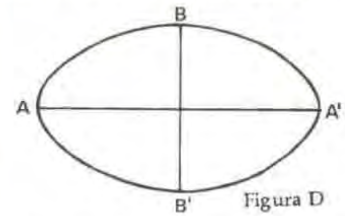


Figura D

5. El eje de simetría de un rectángulo es el segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos. (Figuras E.)

$\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ son los dos ejes de simetría.

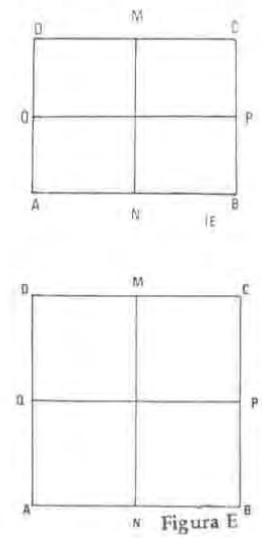
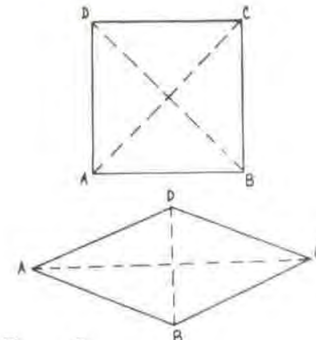


Figura E

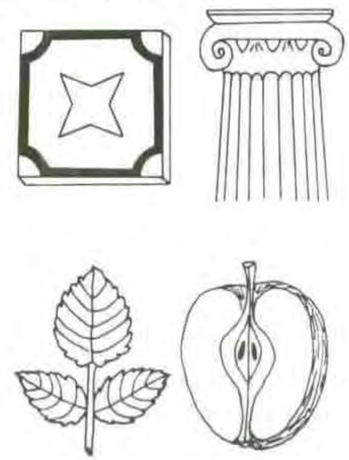
6. Las diagonales del cuadrado y del rombo son sus ejes de simetría. (Figuras F.)



Figuras F

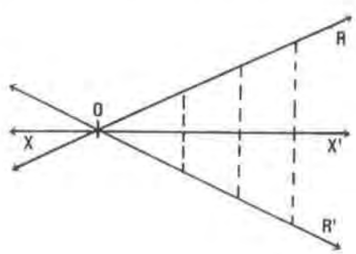
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son ejes de simetría en ambas figuras.

7. Tanto en la naturaleza como en el arte, encontramos figuras que presentan simetría respecto a un eje.



19.10. APLICACIONES IMPORTANTES. Por medio de la simetría axial se pueden probar algunas proposiciones geométricas.

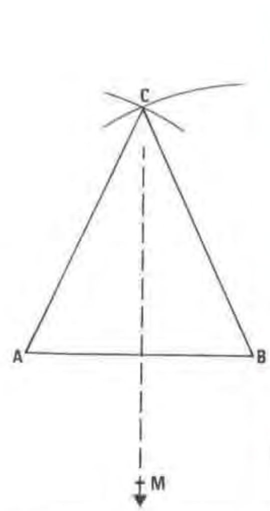
1. Si dos rectas no paralelas son simétricas respecto a un eje, dicho eje es la bisectriz del ángulo que forman las rectas.



Siendo $\overrightarrow{R}$ y $\overrightarrow{R'}$ simétricas respecto a $\overleftrightarrow{XX'}$, para cada punto de R corresponde otro simétrico en R'. Por lo mismo, dichos puntos equidistan del eje. Entonces, al cortarse R y R', la intersección debe coincidir en un punto 0 del eje.

Luego: Los ángulos R0X' y X'0R' son simétricos y, por tanto, congruentes. En consecuencia, $\overline{XX'}$ es bisectriz del ángulo formado por las rectas R y R'.

2. En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son también congruentes.

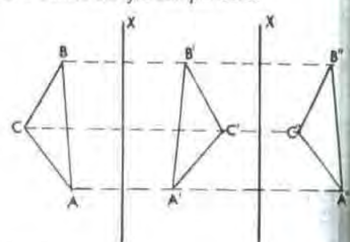


En el triángulo isósceles ABC, si CM es bisectriz de C, será eje de simetría de dicho triángulo.

Entonces, $\hat{A} \cong \hat{B}$ por ser simétricos con respecto a $\overrightarrow{CM}$.

19.11. DOBLE SIMETRÍA AXIAL. Cuando se tiene una doble simetría de figuras, como en los ejemplos que siguen, pueden hacerse algunas observaciones importantes:

1. *Cuando los ejes son paralelos*



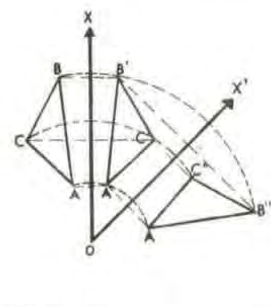
Se observa que:

a) Los triángulos ABC, A'B'C' y A''B''C'' son congruentes porque coinciden en todos sus puntos.

b) Por una traslación del Δ ABC se puede obtener el Δ A''B''C'', en lugar de hacer una doble simetría.

2. *Cuando los ejes no son paralelos*

Los ejes X y X' se cortan en 0.



Se observa que:

a) Los triángulos ABC, A'B'C' y A''B''C'' son congruentes.

b) Por una rotación del Δ ABC en torno de 0 se puede obtener el Δ A''B''C'', en lugar de hacer una doble simetría.

Ejercicio XCVII

A. Dibujar un triángulo cualquiera y trazar después su simétrico respecto a un eje situado fuera de la figura.

B. Dibujar un cuadrado y, tomando uno de sus lados como eje de simetría, trazar su simétrico.

C. Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior con un rombo, un romboide, un trapecio y un trapezoide.

D. Trazar los ejes de simetría posibles en un cuadrado.

E. Trazar el eje de simetría de un círculo. ¿Cuántos ejes de simetría se le pueden trazar?

F. Trazar tres figuras geométricas de las que pueda afirmarse que sus diagonales son ejes de simetría y dibujar dichos ejes.

G. Trazar la perpendicular mediatriz de un segmento. Explicar por qué esa recta es eje de simetría de dicho segmento.

H. Trazar una circunferencia y un diámetro de la misma.

a) Trazar una cuerda perpendicular a dicho diámetro.

b) Explicar por qué los dos arcos comprendidos entre los extremos de la cuerda y un extremo del diámetro son simétricos.

c) ¿Cómo serán entre sí dichos arcos?

I. Trazar en un círculo dos cuerdas que sean perpendiculares a un mismo diámetro.

a) ¿Cómo son entre sí las dos posiciones de ambas cuerdas?

b) ¿Por qué puede afirmarse que los dos arcos comprendidos entre ambas cuerdas son congruentes entre sí?

J. Dibujar tres figuras artísticas, objetos o formas de la naturaleza que presenten simetría axial.

219

BLOQUE

III

CAPITULO
XXIII y XXIV

CURSO DE GEOMETRIA

F.J. LANDAVERDE

8. Construir un triedro rectángulo cuyas caras adyacentes al diedro recto midan respectivamente 80° y 100°.

9. Una torre está rematada por un ángulo poliedro regular de 6 caras; ¿entre qué límites puede variar la suma de los ángulos de las bases de los triángulos laterales?

10. **Probar que toda sección hecha en un triedro rectángulo perpendicularmente a la arista del diedro recto es un triángulo rectángulo.**

11. Demostrar que si dos caras de un triedro son iguales, los diedros opuestos a ellas son también iguales. Enunciar la propiedad análoga de la geometría plana.

12. Demostrar que en todo triedro que tiene dos caras iguales el plano trazado por su *arista* común y la bisectriz de la otra cara es perpendicular a esta última y bisector del diedro opuesto a ella.

13. Demostrar que dos triedros simétricos son iguales si cada uno tiene dos diedros iguales (fig. 423).

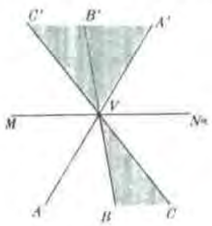


Fig. 423.

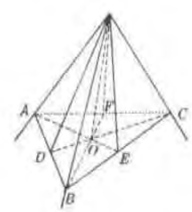


Fig. 424.

14. Demostrar que los planos que proyectan las aristas de un triedro sobre las caras opuestas se cortan según una misma recta (figura 424).

15. ¿Entre qué límites varían: 1º la suma de los lados de un triángulo y la suma de las caras de un triedro; 2º la suma de los ángulos de un triángulo y la suma de los diedros de un triedro?

CAPITULO XXIII

POLIEDROS EN GENERAL — PRISMAS

428. Definiciones. — *Llámase* **poliedro** *un cuerpo o sólido geométrico limitado por planos.*

Las intersecciones de estos planos forman polígonos llamados *caras* del poliedro; los lados de las caras se llaman *aristas;* y las intersecciones de las aristas, *vértices*. Los diedros y los ángulos poliedros formados por las caras son los *ángulos diedros y poliedros del poliedro.*

Diagonal de un poliedro es toda recta que une dos vértices no situados en una misma cara.

Un poliedro es *convexo* cuando está situado todo entero en un mismo lado de cada una de sus caras.

De esta definición se deduce:

1º Que todo plano secante a un poliedro convexo, lo corta según un polígono convexo.

2º Que una recta no puede cortar un poliedro convexo en más de dos puntos.

Poliedro regular es aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales y cuyos ángulos poliedros son también iguales.

Atendiendo al número de sus caras, los poliedros se clasifican en *tetraedros, pentaedros, hexaedros,* etc., según tengan cuatro, cinco, seis, etc. caras.

429. Prisma. — *Llámase* **prisma** *el poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas y las demás caras son paralelogramos* (figs. 425 y 426).

Las caras iguales y paralelas se llaman *bases*, y las demás, *caras laterales*.

Las aristas laterales de un prisma son iguales y paralelas.

***Altura* de un prisma es la distancia que hay entre las dos bases; se mide por la perpendcular común a ellas; v. gr.: la altura $A'P$ (fig. 426).**

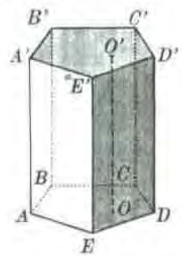


Fig. 425.

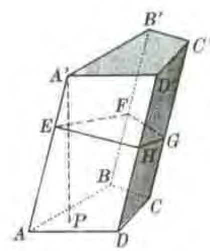


Fig. 426.

Un prisma es *recto* u *oblicuo* según que sus aristas laterales sean perpendiculares u oblicuas a las bases. En el prisma recto, las aristas laterales son iguales a la altura, y en el prisma oblicuo son mayores que ella.

Un prisma es *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., según que sus bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc.

Prisma regular es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.

Sección recta de un prisma es la sección determinada por un plano perpendicular a las aristas laterales; v. gr.: la sección recta $EFGH$ (fig. 426).

Tronco de prisma es la parte de prisma comprendida entre una de las bases y un plano oblicuo a ella que corta todas las aristas laterales; v. gr.: la parte inferior AG de la figura 426.

430. Teorema. — *Todas las secciones de un prisma determinadas por planos paralelos son polígonos iguales.*

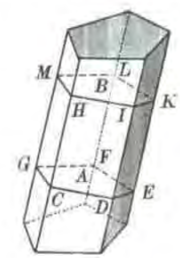


Fig. 427.

Hipót.:	A y B secciones ∥s.
Tesis:	Políg. A = Políg. B.

De la figura 427 se deduce lo siguiente:

$CD \parallel HI$, por intersecciones de planos ∥s cortados por un plano secante;

$CH \parallel DI$, por hipótesis;

$CDIH$ en un ▱, por tener sus lados opuestos ∥s.

$\therefore CD = HI$, por lados opuestos de un ▱.

Del mismo modo se demostraría que DE, EF, FG, GC son respectivamente paralelas e iguales a IK, KL, LM, MH.

Por otra parte, los ∡ en C, D, E, F, G, de la sección A, son respectivamente iguales a los ∡ en H, I, K, L, M, de la sección B, por tener sus lados respectivos paralelos.

Luego, los polígonos A y B son iguales.

431. Corolarios. — 1º *Todas las secciones rectas de un prisma son iguales, por ser paralelas entre sí.*

2º *Toda sección paralela a las bases de un prisma es igual a dichas bases.*

432. Area del prisma. — Al tratar del área de la superficie de los cuerpos geométricos suele emplearse tan sólo la palabra *área*, pero siempre se sobrentiende la expresión completa: *área de la superficie* de estos cuerpos.

El área de un prisma puede ser lateral o total.

223

El área lateral es igual al producto de la arista lateral por el perímetro de la sección recta.

El área total es igual al área lateral más la de las bases.

Sean el prisma AC' y su sección recta $EFGH$ (fig. 426).

1º Las aristas laterales son perpendiculares a la sección recta, y por tanto, a los lados de ésta (Nº 370).

Las caras laterales son paralelogramos que tienen por bases las aristas del prisma, y por alturas los lados de la sección recta; luego, el área lateral es:

$$AA' \times EF + BB' \times FG + CC' \times GH + DD' \times HE;$$

y como $AA' = BB' = CC' = DD'$, se puede poner AA' en factor común, o sea:

$$AA'(EF + FG + GH + HE).$$

Designando por L el área lateral, por a la arista y por p el perímetro de la sección recta, se tiene:

$$L = ap.$$

2º Llamando T el área total y B el área de una de las bases, resulta:

$$T = ap + 2B.$$

433. Corolario. — *El área lateral de un prisma recto es igual al producto de la altura por el perímetro de la base.*

434. Paralelepípedo. — *Llámase* **paralelepípedo** *todo prisma cuyas bases son paralelogramos; por tanto, sus seis caras son paralelogramos* (fig. 428).

Paralelepípedo recto es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases; sus caras laterales son rectángulos.

Paralelepípedo rectángulo es el paralelepípedo recto cuyas bases son rectángulos; por tanto, sus seis caras son rectángulos. Las tres aristas que concurren en un mismo vértice representan sus tres *dimensiones*.

Cubo es el paralelepípedo rectángulo cuyas seis caras son cuadrados; se llama también *hexaedro regular*.

Romboedro es el paralelepípedo cuyas seis caras son rombos.

435. Teorema. — *Las caras opuestas de un paralelepípedo son iguales y paralelas.*

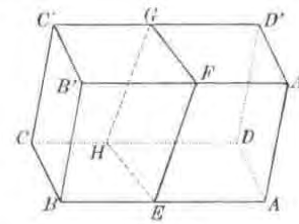


Fig. 428.

Hipót.:	AD' y BC' caras opuestas.
Tesis:	$AD' =$ y $\parallel BC'$.

En el paralelepípedo de la figura 428 se tiene:

$AA' =$ y $\parallel BB'$, por ser AB' un $\square$;

$AD =$ y $\parallel BC$, por ser AC un $\square$;

$\angle A'AD = \angle B'BC$, por ser $AA' \parallel BB'$ y $AD \parallel BC$.

$\therefore \square AD' = \square BC'$, por ser $AA' = BB'$, $AD = BC$ y $\angle A'AD = \angle B'BC$;

$\square AD' \parallel \square BC'$, por ser $\parallel$s los planos de los $\angle A'AD$ y $B'BC$.

Del mismo modo se demostraría que las demás caras opuestas son iguales y paralelas.

436. Corolarios. — 1º *En todo paralelepípedo se pueden tomar por bases dos caras opuestas cualesquiera.*

2º *Toda sección plana que corta cuatro aristas paralelas de un paralelepípedo es un paralelogramo.*

Efectivamente, en el paralelepípedo AC' (fig. 428), la sección $EFGH$ es un paralelogramo, pues sus lados opuestos, EF y GH, así como FG y HE, son respectivamente paralelos, por ser intersecciones de planos paralelos cortados por un plano secante.

437. Teorema. — *Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en su punto medio.*

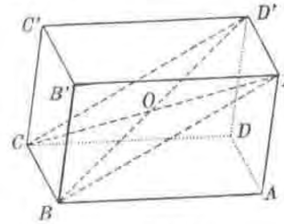


Fig. 429.

Hipót.:	$A'C$ y $D'B$ diagonales.
Tesis:	$A'O = OC$, $D'O = OB$.

Por las aristas opuestas $A'D'$ y BC, trácese el cuadrilátero $A'BCD'$. Se tiene:

$A'BCD'$ es un $\square$, por ser $A'D' = y \parallel BC$ (Nº 435).

$\therefore A'O = OC$, por ser $A'C$ diagonal de $A'BCD'$;

$D'O = OB$, por ser $D'B$ diagonal de $A'BCD'$.

Análogamente se demostraría que los demás pares de diagonales del paralelepípedo se cortan en su punto medio; y como todos estos pares tienen dos a dos una diagonal común, las cuatro se cortan en su punto medio.

438. Corolario. — *Si el paralelepípedo es recto, las diagonales son iguales dos a dos, y si es rectángulo, las cuatro diagonales son iguales.*

439. Observación. — El punto de intersección de las cuatro diagonales de un paralelepípedo es un *centro de simetría*, ya que divide en dos partes iguales no solamente las diagonales, sino también todas las rectas que pasan por él y terminan en la superficie del paralelepípedo.

225

440. Cálculo de la diagonal de un paralelepípedo rectángulo. — *La diagonal de un paralelepípedo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones.*

Sean el paralelepípedo rectángulo AC', y sus dimensiones respectivas a, b y c (fig. 430).

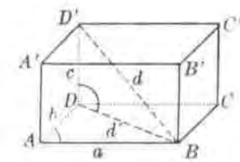


Fig. 430.

Trazando la diagonal d del paralelepípedo y d' la de la base, resultan los $\triangle DAB$ y BDD' que son rectángulos en A y D respectivamente. Se tienen, por tanto, las igualdades siguientes:

En el $\triangle$ rectángulo DAB: $d'^2 = a^2 + b^2$.

En el $\triangle$ rectángulo BDD': $d^2 = d'^2 + c^2$.

Sustitúyase d'^2 por $a^2 + b^2$: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Extráigase la raíz cuadrada: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Para el cubo, como las tres dimensiones son iguales, resulta:

$$d^2 = 3a^2; \quad \text{de donde:} \quad d = a\sqrt{3}.$$

441. Observación. — Si la longitud de dos aristas de un paralelepípedo rectángulo está representada por dos números enteros consecutivos, y la de la tercera es igual a su producto, la longitud de la diagonal es también un número entero que excede en 1 a la de la tercera arista.

En efecto, si se designa por a y $a + 1$ dos números enteros consecutivos, y por $a(a+1)$, su producto, se tiene:

$$a^2 + (a+1)^2 + [a(a+1)]^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1;$$

$$[a(a+1)+1]^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1.$$

$$\therefore a^2 + (a+1)^2 + [a(a+1)]^2 = [a(a+1)+1]^2.$$

Así, si $a = 3$, $b = 4$ y $c = 12$, se tiene:

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13.$$

442. Desarrollo y construcción de poliedros. — Desarrollar un poliedro es trazar en un plano todas sus caras, dispuestas de tal modo que, doblando debidamente las diferentes partes de la figura, resulte un cuerpo hueco de igual forma y magnitud que el poliedro propuesto (**fig. 431**).

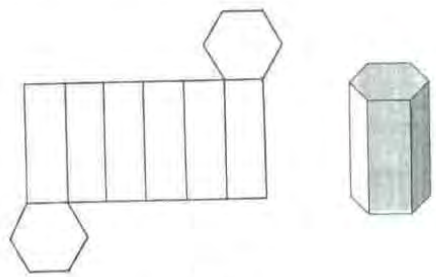


Fig. 431.

Para *construir* poliedros, conviene emplear cartoncillo; y al recortar el dibujo, se deben dejar en el contorno exterior algunos picos o fajas que, previamente engomados, sirvan para sujetar las diferentes partes de la figura. Con el fin de que el cartoncillo se doble fácilmente, se pasa suavemente, por las líneas que indican los doblados, la punta de un compás o de un punzón guiada por una regla.

EJERCICIO XXIII

1. Calcular el área lateral de un prisma recto, dado que el perímetro de la base y la altura miden respectivamente: 1º 25 cm y 15 cm; 2º 24.5 cm y 16.4 cm.

2. Calcular el área lateral de un prisma oblicuo en el que el perímetro de la sección recta y las aristas laterales miden respectivamente: 1º 32 cm y 18 cm; 2º 1.50 m y .80 m.

3. ¿Qué clases de cuerpos resultan al cortar un prisma recto por dos planos oblicuos a las bases y paralelos entre sí?

4. Los lados de la base de un pilar hexagonal regular miden 40 cm, y la altura 5 m; expresar en metros cuadrados el área de su superficie.

5. Hállese el área total de un prisma triangular regular, sabiendo que el lado de la base mide 4 cm y la altura 10 cm.

6. En un paralelepípedo las caras de uno de los triedros tienen respectivamente 75°, 80° y 85°; calcular las caras de los demás triedros.

7. Demostrar que las diagonales de un paralelepípedo rectángulo son iguales.

8. Las caras de uno de los triedros de un paralelepípedo tienen todas 60°, y sus aristas miden respectivamente 3, 4 y 5 cm; calcular el área total del paralelepípedo.

9. La diagonal d de una de las caras de un cubo mide 4 cm; calcular la diagonal d' del cubo.

10. La diagonal d de un cubo mide 6 cm; calcular la diagonal d' de las caras.

11. ¿Qué cuerpos resultan al cortar un cubo de 5 cm de arista por un plano que contenga dos aristas opuestas? Calcular el área de uno de estos cuerpos.

12. Cortar un cubo de 5 cm de arista por un plano que pase por tres de sus vértices, de manera que la intersección sea un triángulo equilátero. Calcular el área de este triángulo.

13. Reproducir la figura 431, dando al lado de la base 5 cm y a la altura 15 cm (desarrollo y construcción). Calcular el área total del prisma.

14. Calcular la arista de un cubo cuya área total es de 1 dm^2.

15. Calcular la arista de un prisma triangular regular, si su altura es igual al lado de la base, y el área total es de 1 dm^2.

16. Demostrar que la sección de un prisma por un plano paralelo a las aristas laterales es un paralelogramo.

17. Uno de los ángulos de la base de un paralelepípedo recto mide 70°; ¿cuánto miden los ángulos planos de todos sus diedros?

18. Un paralelepípedo cuya base es un cuadrado de 4 cm de lado, tiene por caras laterales dos cuadrados y dos rombos; estos últimos tienen uno de sus ángulos igual a 60°; calcúlese el área total del paralelepípedo.

19. Demostrar que la suma de los cuadrados de las cuatro diagonales de un paralelepípedo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las doce aristas.

20. Construir un cubo cuya diagonal mida 12 cm.

21. Se quiere construir con lámina un tanque en forma de paralelepipedo rectángulo cuyas dimensiones sean 2 m, 1.75 m y 90 cm de profundidad; ¿cuántos metros cuadrados de lámina se necesitan, suponiendo que se emplean .50 m² para las ensambladuras?

22. Un punto situado en el interior de un triedro trirrectángulo dista de sus caras 3, 4 y 5 cm respectivamente; calcular su distancia al vértice del triedro (fig. 432).

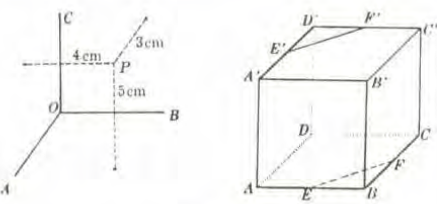


Fig. 432.

23. ¿Qué figura resulta si se corta el cubo AC' (fig. 432) por un plano trazado por las rectas EF y $E'F'$ que unen los puntos medios de las aristas AB y BC, $A'D'$ y $D'C'$?

CAPITULO XXIV

PIRAMIDES — POLIEDROS REGULARES

I. PIRAMIDES

443. Definiciones. — *Llámase* **pirámide** *un poliedro que tiene por base un polígono cualquiera, y por caras laterales tres o más triángulos que tienen un vértice común*; v. gr.: la pirámide $VABCD$ (fig. 433).

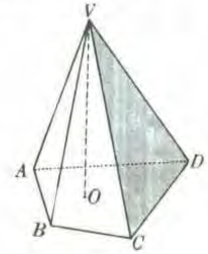


Fig. 433.

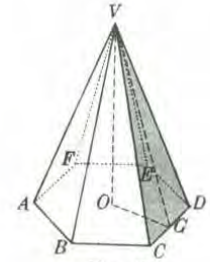


Fig. 434.

Este vértice común es el *vértice* de la pirámide; también se llama *cúspide*.

Los lados de las caras laterales que concurren al vértice se denominan *aristas laterales*.

Altura de una pirámide es la perpendicular trazada desde el vértice a la base; v. gr.: la altura VO (fig. 433).

Una pirámide es *triangular, cuadrangular, pentagonal*, etc., según que su base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

La pirámide triangular es un *tetraedro*. Como todas sus caras son triángulos, cualquiera de ellas puede tomarse por *base*.

Pirámide regular es aquella que tiene por base un polígono regular cuyo centro coincide con el pie de la altura (fig. 434).

En una pirámide regular todas las aristas laterales son iguales, porque se apartan igualmente del pie de la altura, y las caras laterales son triángulos isósceles iguales.

Apotema de una pirámide regular es la altura de los triángulos que forman las caras laterales; v. gr.: la apotema VG (figura 434). No hay que confundirla con la apotema OG de la base.

Tronco de pirámide es la parte de pirámide comprendida entre la base y un plano que corta todas las aristas laterales (fig. 435). La parte de pirámide que falta se llama *pirámide deficiente*; v. gr.: $VA'B'C'D'E'$.

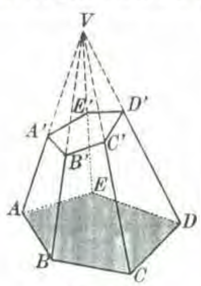


Fig. 435.

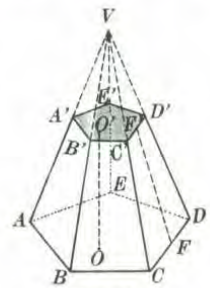


Fig. 436.

Tronco de pirámide regular es la parte de pirámide regular comprendida entre la base y una sección paralela a ella. Las caras laterales son trapecios isósceles iguales (fig. 436).

Altura de un tronco de pirámide regular es la distancia entre las dos bases; v. gr.: la altura OO' (fig. 436).

Apotema de un tronco de pirámide regular es la altura de los trapecios que forman las caras laterales; v. gr.: la apotema FF' (fig. 436).

444. Teorema. — *Si se corta una pirámide por un plano paralelo a la base:*

1º *Las aristas y la altura quedan divididas en partes proporcionales.*

2º *La sección es un polígono semejante a la base.*

3º *La razón de las áreas de ambos polígonos es igual a la razón de los cuadrados de sus distancias al vértice de la pirámide.*

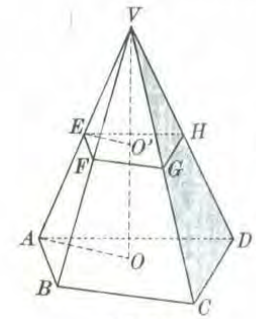


Fig. 437.

Hipót.: Sección $EG \parallel$ a la base AC.

Tesis: $\dfrac{VE}{VA} = \dfrac{VF}{VB} = \dfrac{VG}{VC} = \dfrac{VH}{VD} = \dfrac{VO'}{VO}$,

$EG \sim AC$, $\dfrac{\text{área } EG}{\text{área } AC} = \dfrac{\overline{VO'}^2}{\overline{VO}^2}$.

1º Los planos de la sección EG y de la base AC son paralelos, por hipótesis. Luego, sus intersecciones con los planos secantes que concurren en V son paralelas.

$$\therefore EF \parallel AB,\ FG \parallel BC,\ GH \parallel CD,\ HE \parallel DA,\ EO' \parallel AO.$$

Luego, los pares de $\triangle VEF$ y VAB, VFG y VBC... VEO' y VAO, que tienen estas paralelas por bases, son semejantes, y como estos triángulos tienen lados comunes de dos en dos, resulta:

$$\frac{VE}{VA} = \frac{VF}{VB} = \frac{VG}{VC} = \frac{VH}{VD} = \frac{VO'}{VO}. \qquad (^1)$$

2º Por ser semejantes los triángulos anteriores, se tiene también:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GH}{CD} = \frac{HE}{DA}. \qquad (^2)$$

Además, los ángulos de la sección EG y los de la base AC son respectivamente iguales, por tener sus lados paralelos.

$$\therefore EG \sim AC.$$

3º La serie de razones iguales (^{2}) pertenece al mismo tiempo a los triángulos semejantes y a los polígonos semejantes EG y AC. Luego, las dos series (^{1}) y (^{2}) son iguales. Por tanto, teniendo presente que las áreas de los polígonos semejantes son proporcionales al cuadrado de la razón de semejanza, se tiene:

$$\frac{\text{área } EG}{\text{área } AC} = \frac{\overline{EF}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{VO'}^2}{\overline{VO}^2}.$$

445. Corolario. — *Las bases de un tronco de pirámide regular son semejantes*, puesto que ambas son paralelas y pertenecen a la misma pirámide (fig. 436).

446. Teorema. — *Si dos pirámides tienen igual altura, las secciones hechas a igual distancia de los vértices, paralelamente a las bases, son proporcionales a dichas bases.*

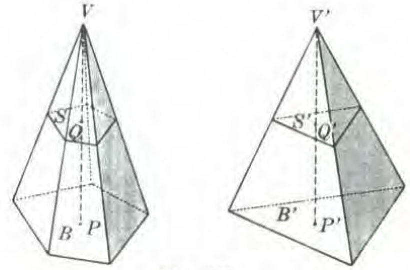


Fig. 438.

Hipót.:	$VP = V'P'$, $VQ = V'Q'$, $B \parallel S$, $B' \parallel S'$.
Tesis:	$\frac{S}{B} = \frac{S'}{B'}$.

Según el teorema anterior, se tiene:

$$\frac{S}{B} = \frac{\overline{VQ}^2}{\overline{VP}^2} \quad \text{y} \quad \frac{S'}{B'} = \frac{\overline{V'Q'}^2}{\overline{V'P'}^2}.$$

Como $VP = V'P'$ y $VQ = V'Q'$, resulta:

$$\frac{S}{B} = \frac{S'}{B'}.$$

447. Corolario. — *Si dos pirámides tienen igual altura y bases equivalentes, las secciones hechas a igual distancia de los vértices, paralelamente a las bases, son también equivalentes.*

448. Area de una pirámide regular. — *El área de una pirámide regular puede ser lateral o total.*

El área lateral es igual al semiproducto del perímetro de la base por la apotema.

El área total es igual al área lateral más el área de la base.

Sea la pirámide regular $VABCDE$ (fig. 439).

1º Todas las caras laterales son triángulos isósceles iguales que tienen por altura la apotema de la pirámide, y por base, cada uno de los lados de la base de la pirámide. Llamando L el área lateral, a la apotema y p el perímetro de la base, se tiene:

$$L = \tfrac{1}{2}(AB \times a + BC \times a + CD \times a + DE \times a + EA \times a);$$
$$L = \tfrac{1}{2}(AB + BC + CD + DE + EA)a;$$
$$L = \tfrac{1}{2}\,pa.$$

2º Llamando T el área total y a' la apotema de la base, resulta:

$$T = \tfrac{1}{2}\,pa + \tfrac{1}{2}\,pa';$$
$$T = \tfrac{1}{2}\,p(a + a').$$

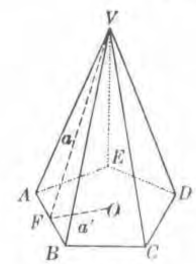


Fig. 439.

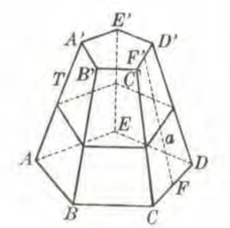


Fig. 440.

449. Area de un tronco de pirámide regular. — *El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual al producto de la semisuma de los perímetros de las bases por la apotema.*

El área total es igual al área lateral más el área de las bases.

Sea el tronco de pirámide regular AD' (fig. 440).

1º Todas las caras laterales son trapecios isósceles iguales que tienen por altura la apotema del tronco de pirámide, y por bases las respectivas bases de cada uno de los trapecios laterales. Por tanto, designando por p y p' los perímetros de las bases, resulta:

$$L = \tfrac{1}{2}(p + p')a.$$

2º Llamando B y B' las áreas de las bases, se obtiene:

$$T = \tfrac{1}{2}(p + p')a + B + B'.$$

Nota. — El polígono formado por las bases medias de los trapecios laterales se llama *base media* del tronco de pirámide. Representando por p'' el perímetro de este polígono, el cual es igual a la semisuma de los perímetros de las bases del tronco, se tiene:

$$L = p''a \quad \text{y} \quad T = p''a + B + B'.$$

450. Area de una pirámide cualquiera. — *El área lateral es igual a la suma de las áreas de las caras laterales, y el área total es igual al área lateral más el área de la base.*

II. POLIEDROS REGULARES

451. — Número de poliedros regulares. — Un ángulo poliedro convexo debe tener por lo menos tres caras, cuya suma ha de ser menor que cuatro rectos (Nº 420).

Por tanto, con triángulos equiláteros se pueden formar los siguientes ángulos poliedros:

triedro: $60 \times 3 = 180°$;
tetraedro: $60 \times 4 = 240°$;
pentaedro: $60 \times 5 = 300°$.

Con cuadrados, sólo se puede formar un ángulo poliedro:

triedro: $90° \times 3 = 270°$.

Con pentágonos regulares, sólo se puede formar un ángulo poliedro.

Efectivamente, la fórmula del ángulo interior de un polígono regular da, para el pentágono:

$$\frac{2r(n-2)}{n} = \frac{2r(5-2)}{5} = 108°.$$

Luego, se obtiene un tiedro, pues, $108 \times 3 = 324°$.

Con polígonos regulares de mayor número de lados no se puede formar ningún ángulo poliedro, porque la suma de sus caras no es menor que cuatro rectos.

Por consiguiente, *no puede haber más de cinco poliedros regulares convexos. Estos son: el tetraedro, el hexaedro o cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro* (fig. 441), cuyo número de caras, vértices y aristas es como sigue:

230

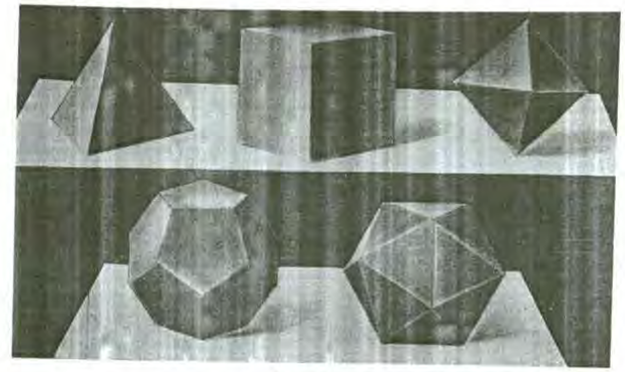


Fig. 441.

Poliedros	Aristas	Caras	Vértices
tetraedro	6	4	4
hexaedro	12	6	8
octaedro	12	8	6
dodecaedro	30	12	20
icosaedro	30	20	12

El hexaedro y el octaedro, así como el dodecaedro y el icosaedro, tienen respectivamente igual número de aristas, y permutados los números de caras y de vértices; por ese motivo se los llama *poliedros conjugados*.

452. Centro de un Poliedro regular. — Todos los poliedros regulares tienen un *centro de figura* que es el punto de intersección de los planos bisectores de sus diedros. Dicho centro de figura equidista de todas las caras, de todos los vértices y de todas las aristas. Por tanto, es también *centro de simetría*, excepto para el tetraedro.

453. Desarrollo y construcción de los poliedros regulares. — El desarrollo de los poliedros regulares está representado en la figura 442. Para desarrollar cada uno de ellos, basta reproducir dicha figura en cartoncillo, a escala conveniente; y para construirlos, se recortan los dibujos según las líneas de trazo continuo, se doblan por las líneas punteadas y se pegan los bordes.

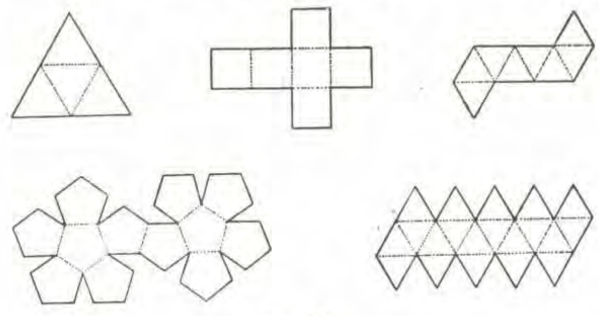


Fig. 442.

EJERCICIO XXIV

1. Calcular el área lateral de una pirámide regular en la que el perímetro de la base y la apotema son respectivamente de: 1º 40 cm y 20 cm; 2º 35.8 cm y 18.5 cm.

2. Calcular el área lateral de un tronco de pirámide regular en el que los perímetros de las bases y la apotema son respectivamente de: 1º 50, 30 y 20 cm; 2º 2.75, 1.80 y .82 m.

3. Calcular el área lateral y total de una pirámide regular de base cuadrada de 4.8 cm de lado, y cuya apotema mide 7.5 cm.

4. Calcular el área lateral y total de una pirámide regular de base hexagonal de 5 cm de lado, y cuya apotema mide 8 cm.

5. Demostrar que en un tronco de pirámide de bases paralelas, el perímetro de una sección hecha paralelamente a las bases y equidistante de las mismas, es igual a la semisuma de los perímetros de las bases.

6. El área total de una pirámide regular de base cuadrada es de 2 dm^2, y el lado de la base mide 8 cm; ¿cuál es la altura de la pirámide?

7. Hallar el área lateral y total de un tronco de pirámide regular de bases cuadradas, sabiendo que los lados de las bases y las aristas laterales miden respectivamente 8, 4 y 9 cm.

8. En una pirámide regular de base hexagonal la altura tiene 10 cm y el lado de la base 4 cm; calcular la longitud de las aristas laterales.

9. Se corta la pirámide del problema anterior por un plano paralelo a la base, a 5 cm del vértice; calcular el área de la base y de la sección.

10. ¿A qué distancia del vértice debería estar el plano secante del problema anterior para que la sección fuese de 15 cm^2?

11. Calcular el área de un octaedro regular de 7 cm de arista.

12. Construir el desarrollo de un icosaedro regular de 2 cm de arista.

13. La Gran Pirámide de Egipto tiene por base un cuadrado de 232 m de lado, y sus caras laterales son triángulos equiláteros; calcular su área lateral. (fig. 443).

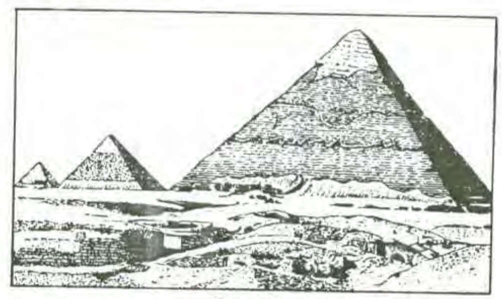


Fig. 443.

14. ¿Cuántos grados tiene la suma de las caras de cada uno de los ángulos poliedros de los cinco poliedros regulares?

15. El área de un tetraedro regular mide 1 dm^2; calcular su arista.

16. La base de una pirámide regular es un triángulo equilátero de 4 cm de lado; las aristas laterales miden 6 cm; calcular el área total.

17. Una pirámide regular de base cuadrada tiene todas sus aristas iguales, y su área total mide 5 dm^2; calcular su arista.

18. ¿Cuántas diagonales tienen: el tetraedro, el hexaedro y el octaedro regulares? Calcular la longitud de la diagonal del octaedro regular, sabiendo que la arista tiene 8 cm.

19. Demostrar que en un tetraedro regular, todo plano perpendicular a una arista en su punto medio, contiene la arista opuesta.

20. Demostrar que los planos bisectores de los diedros de un tetraedro se cortan en un mismo punto.

21. El desarrollo de un icosaedro regular ocupa una superficie de 40 dm^2; calcular su arista.

CAPITULO
XXI

GEOMETRIA

PLANA

MARTINEZ CABALLERO

232

Ejemplos:

1. Calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, si sus catetos miden 6 cm y 8 cm, respectivamente.

Fórmula	*Sustitución*
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$c = \sqrt{6^2 + 8^2}$

Operaciones

	Resultado
$c = \sqrt{36 + 64}$	
$c = \sqrt{100} = 10$	$c = 10$ cm

2. Calcular la longitud de un cateto, si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm y uno de los catetos 12 cm.

Fórmula	*Sustitución*
$a = \sqrt{c^2 - b^2}$	$a = \sqrt{20^2 - 12^2}$

Operaciones

	Resultado
$a = \sqrt{400 - 144}$	
$a = \sqrt{256} = 16$	$a = 16$ cm

Ejercicio C

A. Considerando las dimensiones dadas para cada triángulo rectángulo, calcular el elemento que se indica:

a) Cateto $a = 18$, cateto $b = 24$. Calcular la hipotenusa.

b) Hipotenusa $c = 20$, cateto $b = 12$. Calcular el otro cateto.

c) Catetos de 27 cm y 36 cm. Calcular la hipotenusa

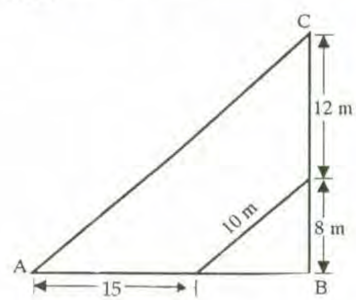
d) Hipotenusa 55 cm y un cateto 44 cm. Calcular el otro cateto.

B. Calcular la diagonal de un rectángulo que mide 48 cm de largo y 36 cm de ancho.

C. Calcular, aproximando hasta centésimos, la diagonal de un cuadrado que mide 30 cm por lado.

D. Calcular hasta centésimos la altura de un triángulo equilátero de 30m de lado.

E. Con los datos de la figura, calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC.

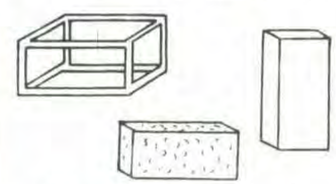


21 SÓLIDOS. CÁLCULO DE VOLÚMENES, DESARR...

21.1. SÓLIDOS. Todos los objetos que nos rodean: libros, escritorio, sillas, lápices, puertas, etcétera, son cuerpos y en todos ellos apreciamos diferentes cualidades: Forma, color, peso, dureza, dimensiones, etcétera, y además que todos ellos definen un lugar en el espacio que nos rodea.

Pero si los imaginamos sin más cualidades que su forma y dimensiones, nos podemos hacer una idea de lo que en geometría llamamos *sólidos* o *cuerpos geométricos,* sin importar que estén llenos o no de sustancia alguna y sólo tomaremos en cuenta su *forma* y *dimensiones.*

Podemos así considerar que un *sólido* es un *espacio limitado* cualquiera.



Un armazón de madera, un bloque de hielo, un prisma recto, son *sólidos.*

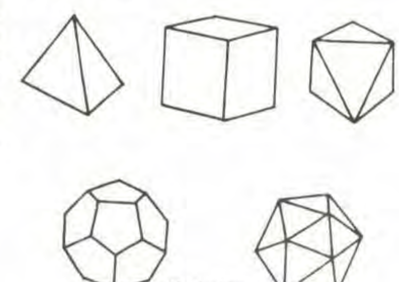
Los sólidos tienen tres dimensiones:

longitud, anchura y *altura* o *profundidad.*

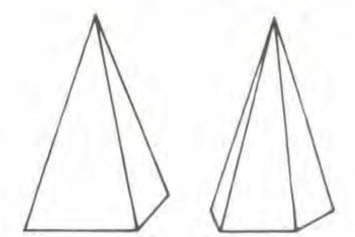
Los sólidos están limitados por superficies, llamadas caras. Estas pueden ser planas o curvas.

21.2. ... Los diferentes sólidos que vemos en torno nuestro, pueden agruparse en dos clases, atendiendo a las superficies que los limitan.

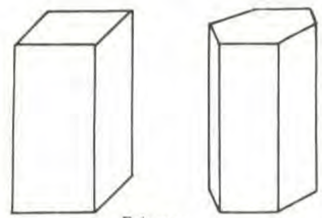
1. Aquellos que tienen todas sus caras planas (como la mesa, las vigas, un ladrillo, etcétera.), constituyen el grupo de los *poliedros.*



Poliedros



Pirámides



Prismas

2. Aquellos que tienen alguna o algunas superficies curvas (como los focos, los gises, las llaves, etcétera.) forman el grupo de los *cuerpos redondos.*

21.3. CLASIFICACIÓN DE LOS POLIEDROS. Los poliedros pueden ser regulares o irregulares.

Los poliedros cuyas caras son polígonos regulares y cuyos ángulos son iguales, reciben el nombre de *poliedros regulares*; los que no cumplen con estas condiciones, se llaman *poliedros irregulares.*

Hay cinco poliedros regulares:

Tetraedro, con cuatro caras en forma de triángulos equiláteros.

Hexaedro o *cubo,* con seis caras cuadradas.

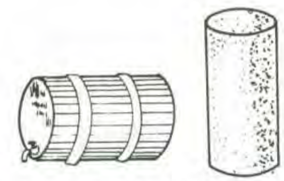
Octaedro, con ocho caras en forma de triángulos equiláteros.

Dodecaedro, con doce caras en forma de pentágonos regulares.

Icosaedro, con veinte caras en forma de triángulos equiláteros.

Los poliedros irregulares más conocidos son el *prisma* y la *pirámide.*

21.4. CUERPOS REDONDOS. Son los más comunes en la naturaleza. Distinguimos entre ellos tres formas principales: el *cilindro,* el *cono* y la *esfera.*



Cilindros

Conos

Esferas

21.5. VOLUMEN DE LOS CUERPOS. El volumen de un cuerpo se mide en unidades cúbicas, o sea, con cubos cuya arista es igual a la unidad de longitud.

Así, por ejemplo, si la unidad de longitud es el metro, la unidad de volumen es el metro cúbico; si la unidad de longitud es la yarda, la de volumen es la yarda cúbica, etcétera.

Medir el volumen de un cuerpo es determinar el número de unidades cúbicas o fracciones de ella que contiene.

21.6. VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO RECTÁNGULO. Sea determinar el volumen de un salón en forma de paralelepípedo rectángulo, que mide 8 metros de largo, 4 metros de ancho y 3 metros de altura.

Si imaginamos que, sobre cada uno de los 32 metros cuadrados del piso ($8 \times 4 = 32$ m^2), colocamos tres cubos de un metro de arista, sobrepuestos, hasta llegar al techo, podemos determinar el número total de cubos que caben en el salón multiplicando los 32 m^2 que mide el piso por los tres cubos de cada columna.

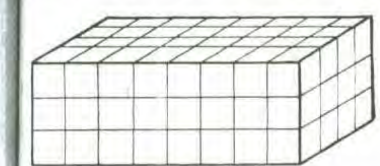
Así se tiene

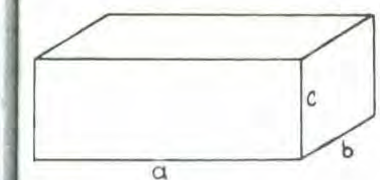
$$\text{Volumen} = 32 \times 3 = 96 \text{ m}^3$$

o sea,

$$V = 8 \times 4 \times 3$$

De igual modo, podría calcularse el volumen de cualquier objeto, de la misma forma, aunque las dimensiones no estén dadas en números naturales.





Luego, basta multiplicar las tres dimensiones de un paralelepípedo rectángulo para obtener su volumen.

Si estas dimensiones se representan por *a, b* y *c,* se puede escribir:

$\boxed{V = abc}$ *(Fórmula)*

El volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones.

Para calcular un volumen, los datos deben estar expresados en la misma unidad de medida. Si ésta es el centímetro, el volumen resultará expresado en centímetros cúbicos; si es el decímetro, en decímetros cúbicos, etcétera.

Ejemplo:

Calcular el volumen de una caja de zapatos que mide 30 centímetros de largo, 20 centímetros de ancho y 15 centímetros de altura.

Fórmula

$$V = abc$$

Sustitución

$$V = 30 \times 20 \times 15$$

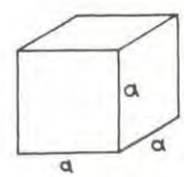
Resultado

$$V = 9\,000 \text{ cm}^3$$

21.7. VOLUMEN DEL CUBO. Si consideramos un paralelepípedo rectángulo que tenga sus tres dimensiones iguales, se tiene un hexaedro o cubo.

Por tanto, aplicando la misma regla, resulta

$$V = aaa$$



$\boxed{V = a^3}$ *(Fórmula)*

El volumen de un cubo es igual a la tercera potencia de una de sus aristas.

Ejemplo:

Calcular el volumen de un depósito cúbico de agua que mide 2.50 metros de arista.

Fórmula

$V = a^3$

Sustitución

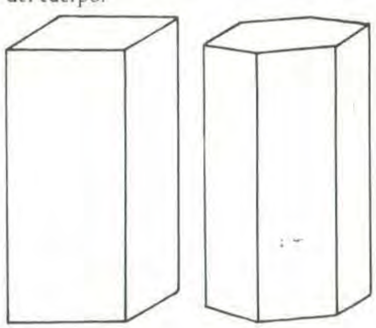
$V = 2.50^3$

$V = 2.50 \times 2.50 \times 2.50$

Resultado

$V = 15.625\ m^3$

21.8. VOLUMEN DEL PRISMA RECTO. Un prisma es recto, cuando sus aristas laterales son perpendiculares a las bases. Cualquier arista lateral es *altura* del cuerpo.



Haciendo las misma consideraciones que se hicieron para el paralelepípedo rectángulo, podemos llegar a la conclusión siguiente:

El volumen de un prisma recto es igual al producto del área de una de sus bases, multiplicada por la altura.

Si llamamos B al área de la base y h a la altura del prisma, se tiene

$\boxed{V = Bh\ (Fórmula)}$

Para el cálculo del volumen de un prisma, conviene hallar primero el área de la base, aplicando la fórmula adecuada, y multiplicar después el resultado obtenido, por la altura.

Ejemplos:

1. Calcular el volumen de un prisma recto de base cuadrada, que mide 20 cm de lado en la base y 40 cm de altura.

Como la base es cuadrada, se tiene

$B = l^2$

$B = 20^2 = 400\ cm^2$

Para el volumen, se tiene

Fórmula

$V = Bh$

Sustitución

$V = 400 \times 40$

Resultado

$V = 16\ 000\ cm^3$

2. Calcular el volumen de un prisma recto, cuyas bases son pentágonos regulares que miden 8 cm de lado y 5.5 cm de apotema, siendo la altura del prisma de 10 cm.

Cálculo de B

$$B = \frac{Pa}{2}$$

$P = 5 \times 8 = 40$ cm

Entonces,

$$B = \frac{40 \times 5.5}{2} = 110$$

$B = 110\ cm^2$

Cálculo del volumen

Fórmula

$V = Bh$

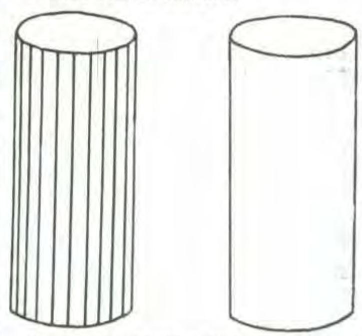
Sustitución

$V = 110 \times 10$

Resultado

$V = 1\ 100\ cm^3$

21.9. VOLUMEN DEL CILINDRO RECTO. Si consideramos un prisma recto de bases regulares que tenga un número ilimitado de lados, el prisma se confunde con un cilindro.



Por tanto, puede aplicarse al cilindro la misma fórmula del prisma, para calcular su volumen.

Como *B*, en el cilindro, es igual a πr^2 (área de un círculo), se tiene

$\boxed{V = \pi r^2 h\ (Fórmula)}$

El volumen del cilindro es igual al producto de π por el cuadrado del radio y por la altura.

Ejemplo:

1. Calcular el volumen de un tinaco cilíndrico que mide 50 cm de radio y 1.20 m de altura.

Fórmula

$V = \pi r^2 h$

Sustitución

$V = 3.1416 \times 0.50^2 \times 1.20$

$V = 3.1416 \times 0.25 \times 1.20$

Resultado

$V = 0.942480\ m^3$

Ejercicio CI

A. Calcular el volumen de un paralelepípedo que mide 15 cm de largo, 10 cm de ancho y 12 cm de altura.

B. Calcular el volumen de un prisma recto, cuyas bases son cuadrados de 15 cm de lado, y la altura del prisma de 25 cm.

C. Calcular el volumen de un tinaco cilíndrico de 1.20 m de altura y 0.35 m de radio.

D. Calcular el volumen de un cubo, cuya arista mide 15 cm.

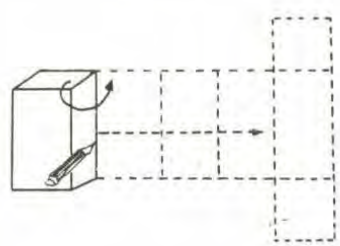
E. Calcular el volumen de una alberca de forma de paralelepípedo rectángulo que mide 20 m de largo, 12 m de ancho y 3 m de profundidad.

F. Calcular el volumen y la capacidad de un tinaco cilíndrico de 1.20 m de altura, y 0.60 m de radio.

Recordar que en la práctica se considera que un decímetro cúbico equivale a un litro, que la capacidad se mide en litros y que el litro de agua pesa un kilogramo.

G. ¿Cuánto pesará el agua contenida en un depósito en forma de cubo, que mide 2.50 m de arista?

21.10. DESARROLLO DE PRISMAS RECTOS. Podemos comprender el *desarrollo de un prisma recto*, si lo hacemos girar sobre una hoja de papel apoyada en la mesa, y vamos trazando con lápiz el contorno de cada cara al momento de apoyarla. Lo mismo se hace con las bases, levantando el prisma apoyado en una arista de la base.



El desarrollo o "representación plana" del prisma, se observa en las líneas punteadas.

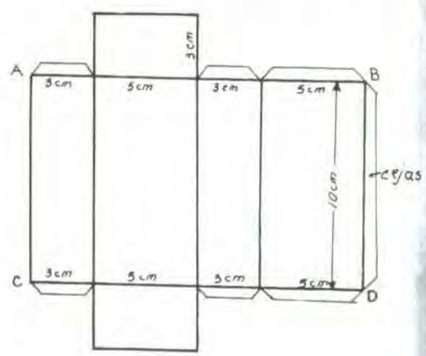
21.11. ARMADO DE PRISMAS RECTOS.

Ejemplo:

Trazar el desarrollo y armar un prisma recto de 10 cm de altura y bases rectangulares de 3 cm × 5 cm.

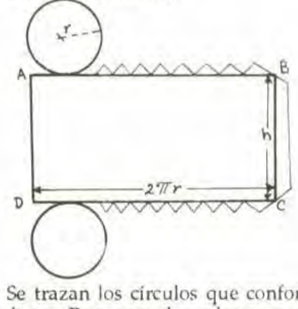
En cartoncillo o cartulina:

1. Trazar un rectángulo (ABCD) con longitud igual al perímetro de una base y anchura igual a la altura del prisma (Ver la figura).
2. En las líneas AB y CD, marcar las medidas de cada base, siguiendo el mismo orden que tienen en ésta, como se ve en la siguiente figura, marcando tantas medidas como lados tiene esa base, y unir con línea recta las marcas iguales de las líneas AB con CD.
3. Trazar las dos bases sobre las orillas del rectángulo, cuidando que un lado de ellas, quede sobre un tramo de la misma medida.
4. Trazar las cejas que servirán para pegar las diferentes partes de la figura.



21.12. DESARROLLO DEL CILINDRO RECTO. Su desarrollo es similar al del prisma recto.

Es un rectángulo que tiene como dimensiones: largo, que es igual a la longitud de la circunferencia de una de sus bases: $(2\pi r)$, y ancho, que es igual a la altura del cilindro (h).



Se trazan los círculos que conforman las bases. Para armarlo, se le ponen cejas.

Ejercicio CII

Trazar los desarrollos y armar los cuerpos geométricos que se indican.

a) Un prisma recto de bases cuadradas de 10 cm de altura y 4 cm de lado en las bases.

b) Un prisma recto rectangular, de 10 cm de altura y de 4 cm por 3 cm en las bases.

c) Un cilindro recto de 8 cm de altura y 3 cm de radio en las bases.

d) Un cilindro recto de 4 cm de altura y 4 cm de radio en las bases.

Ejercicio CIII

Resolver los siguientes problemas, consultar la tabla de perímetros y áreas al final de este capítulo.

A. Un jardín tiene la forma de un triángulo equilátero, y mide 22 m por lado.

a) ¿Cuánto costará resembrarlo totalmente, si un jardinero cobra por material y mano de obra $25.00 por metro cuadrado?

b) ¿Cuántos metros de alambre se requieren para cercarlo con tres hileras de protección?

B. Una pista de patinar tiene la forma de un pentágono regular y mide 25 m por lado. Calcular su área y su perímetro.

C. Una fuente tiene la forma de un rombo. Sus diagonales miden 12 y 8 metros, respectivamente ¿Cuántos metros cuadrados de mosaico se requieren para recubrir totalmente el fondo de ella?

D. Calcular el área de una pista de juego que tiene la forma de un sector circular que mide 12 m de radio y el ángulo que forman sus radios laterales es de 50 grados.

Ejercicio CIV

Consultar el formulario de volúmenes y áreas de cuerpos geométricos, que aparece al final de este capítulo, para resolver los siguientes problemas:

A. Calcular el área lateral de un depósito cilíndrico que mide 1.30 m de altura y 0.85 m de radio.

B. Se va a pintar un monumento ornamental que tiene la forma de un cono recto de 15 metros de altura, 4 metros de radio y 15.52 m de generatriz. ¿Cuál será su costo a razón de $60.00 por metro cuadrado de pintura?

C. Calcular el volumen de una pirámide regular de base cuadrada que mide 12 m por lado y 10 metros de altura?

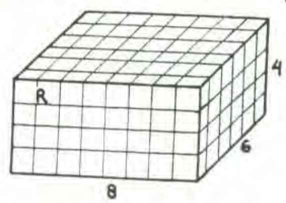
D. Un edificio tiene la forma de un prisma recto de base rectangular que mide 14 m de altura y 20 m por 12 m en la base, sus paredes son totalmente recubiertas de vidrio. Calcular cuántos metros cuadrados de vidrio se necesitaron para ese recubrimiento, considerando que sus puertas también están recubiertas de vidrio.

21.13. EFECTO DE UNA REDUCCIÓN O AMPLIACIÓN A ESCALA SOBRE LAS MEDIDAS LINEALES Y EL VOLUMEN DE UN SÓLIDO.

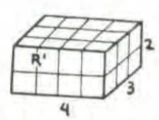
A. En seguida se presenta la reducción a escala $\frac{1}{2}$, de un paralelepípedo rectángulo R.

a) Al observarla notamos que las medidas lineales de R se redujeron a la mitad (quedaron multiplicadas por la escala $\frac{1}{2}$)

b) Observamos también que su volumen disminuyó a la octava parte, (quedó multiplicado por la escala al cubo: $\frac{1}{8}$).



Volumen: $V = 8 \times 6 \times 4 = 192\ u^3$



Volumen: $V = 4 \times 3 \times 2 = 24\ u^3$

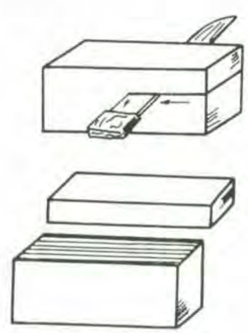
B. Si consideramos que en las mismas figuras, el prisma *R'* se amplía a escala $\frac{2}{1}$: notamos que sus medidas lineales aumentan al doble (quedan multiplicados por la escala). Y también que se volumen aumenta a 8 veces su valor (queda multiplicado por el *cubo de la escala,* $\left(\frac{2}{1}\right)^3 = \frac{8}{1}$) de donde podemos considerar que en una reducción o ampliación a escala de un sólido:

a) Las dimensiones lineales del sólido aumentan o disminuyen proporcionalmente a la escala.

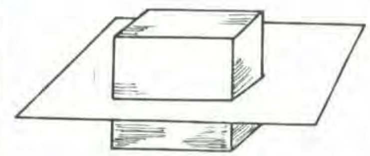
b) El volumen del sólido aumenta o disminuye proporcionalmente al cubo de la escala.

21.14. SECCIONES PLANAS DE PARALELEPÍPEDOS Y CUBOS.

Si construimos un paralelepípedo rectángulo con plastilina o barro y le hacemos un corte plano con un cuchillo, de modo que el corte sea paralelo a sus bases, obtendremos una *sección plana,* la cual tendrá la figura de un rectángulo, de igual forma y tamaño que las bases.



Supongamos que un *plano,* paralelo a dos de las caras del cubo, corta al sólido, ¿qué figura tendrá la sección plana resultante?



¿Será un rectángulo o un cuadrado?

Verificarlo haciendo el corte en un cubo de plastilina o de barro fresco.

Si el plano que corta al cubo no es paralelo a las caras, sino oblicuo, ¿qué figura tendrá la sección plana? Verificarlo haciendo diferentes cortes planos a un cubo y a un paralelepípedo rectángulo.

Ejercicio CV

A. Construir con barro o plastilina un prisma recto con base rectangular y hacerle los siguientes cortes planos:

a) Un corte paralelo a las bases.
b) Un corte no paralelo a las bases.

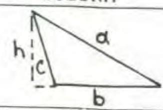
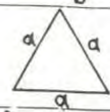
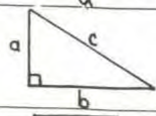
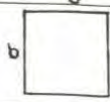
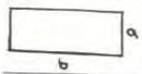
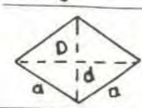
¿Qué figura tiene cada una de las secciones planas?

B. Construir también con barro o plastilina un cubo y hacerle dos cortes planos como los del prisma.

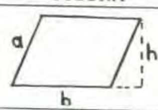
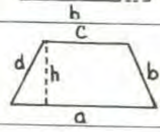
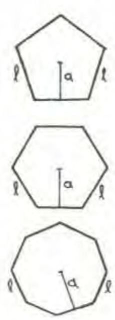
¿Qué figura tienen sus secciones planas obtenidas?

C. Construir una esfera con el mismo material. Hacerle tres cortes diferentes, ¿qué figura tienen las secciones planas?

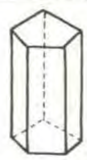
Formulario de perímetros y áreas de figuras planas

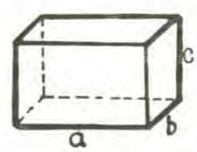
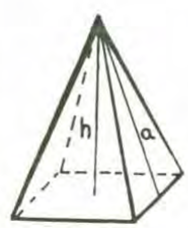
NOMBRE	FIGURA	NOTACIÓN	PERÍMETRO (P)	ÁREA (A)
Triángulo		a, b y c = lados h = altura S = Semiperímetro P = Perímetro	$P = a + b + c$ $S = \frac{a+b+c}{2}$	$A = \frac{bh}{2}$ $A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$
Triángulo equilátero		a = lado	$P = 3a$	$A = 0.433a^2$
Triángulo rectángulo		a y b = catetos c = hipotenusa	$P = a + b + c$	$A = \frac{ab}{2}$
Cuadrado		a = lado	$P = 4a$	$A = a^2$
Rectángulo		a = altura b = base	$P = 2(a + b)$	$A = ba$
Rombo		a = lado D = diagonal mayor d = diagonal menor	$P = 4a$	$A = \frac{Dd}{2}$

Formulario de perímetros y áreas de figuras planas

NOMBRE	FIGURA	NOTACIÓN	PERÍMETRO (P)	ÁREA (A)
Paralelogramo		a y b = lados h = altura	$P = 2(a + b)$	$A = bh$
Trapecio		a, b, c y d = lados a y c = lados paralelos h = altura	$P = a + b + c + d$	$A = \left(\frac{a+c}{2}\right)h$
Polígonos regulares		l = lado a = apotema n = número de lados	$P = nl$	$A = \frac{ab}{2}$ o bien: PENTÁGONO $A = 1.721\ l^2$ HEXÁGONO $A = 2.598\ l^2$ EPTÁGONO $A = 3.634\ l^2$ OCTÁGONO $A = 4.828\ l^2$ ENEÁGONO $A = 6.182\ l^2$ DECÁGONO $A = 7.694\ l^2$

Formulario de perímetros y áreas de figuras planas				
NOMBRE	FIGURA	NOTACIÓN	PERÍMETRO (P)	ÁREA (A)
Círculo		D = diámetro r = radio π = 3.1416	$P = \pi D$ $P = 2\pi r$	$A = \frac{\pi D^2}{4}$ $A = \pi r^2$
Sector circular		l = longitud del arco r = radio n = número de grados	$l = 0.01745\, r\, n$ $P = l + 2r$	$A = \frac{\pi r^2 n}{360}$ $A = \frac{l r}{2}$

Formulario de volúmenes y áreas de cuerpos geométricos				
NOMBRE	FIGURA	NOTACIÓN	ÁREA $\begin{cases} \text{lateral} = Al \\ \text{total} = At \end{cases}$	VOLUMEN (V)
Hexaedro		a = arista	$A = 6a^2$	$V = a^3$
Prisma recto		h = altura P = perímetro de la base B = área de la base	$Al = Ph$ $At = Ph + 2B$	$V = Bh$

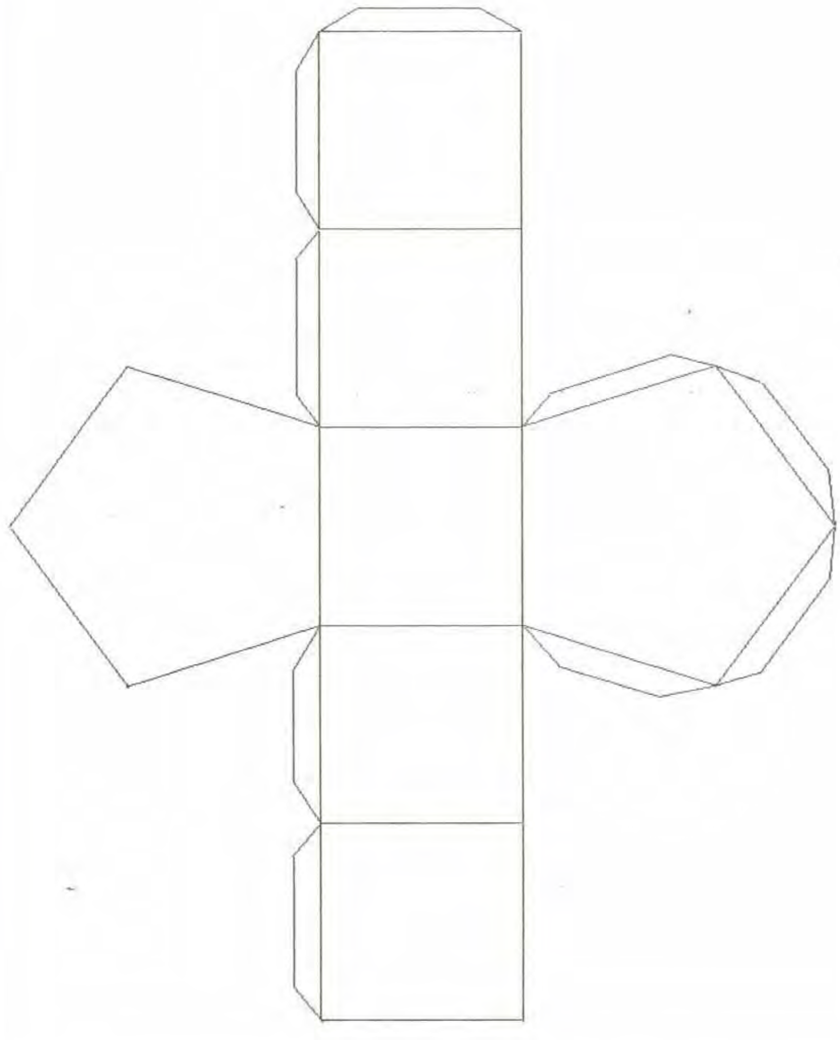
Formulario de volúmenes y áreas de cuerpos geométricos				
NOMBRE	FIGURA	NOTACIÓN	ÁREA $\begin{cases} \text{lateral} = Al \\ \text{total} = At \end{cases}$	VOLUMEN (V)
Paralelepípedo rectángulo		a = largo b = *ancho* c = *altura*	$Al = 2(a+b)c$ $At = 2(a+b)c + 2ab$	$V = abc$
Pirámide regular		P = perímetro de la base B = área de la base a = apotema h = altura	$Al = \frac{1}{2} Pa$ $At = \frac{1}{2} Pa + B$	$V = \frac{1}{3} Bh$

ANEXO 3

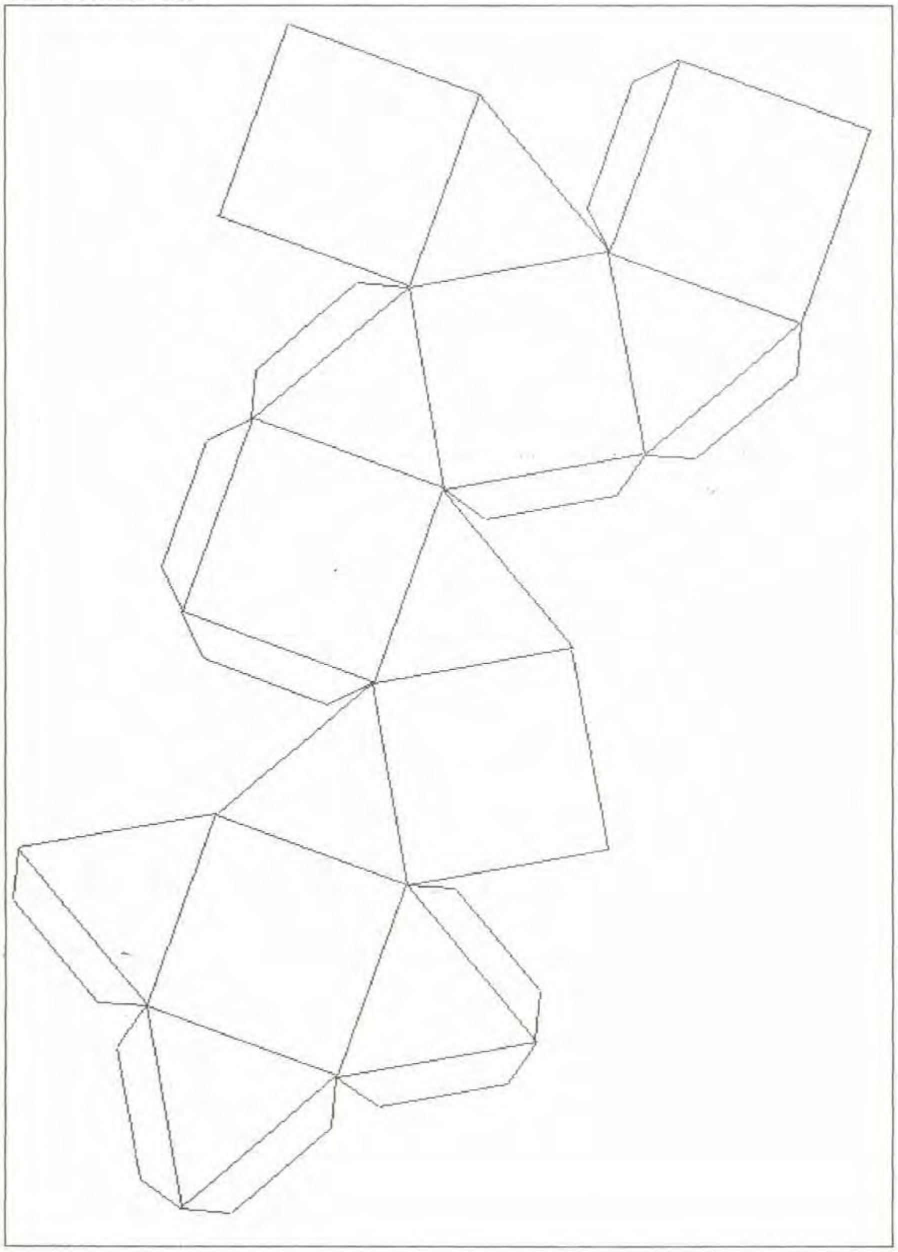
POLIEDROS

SEMI REGULARES

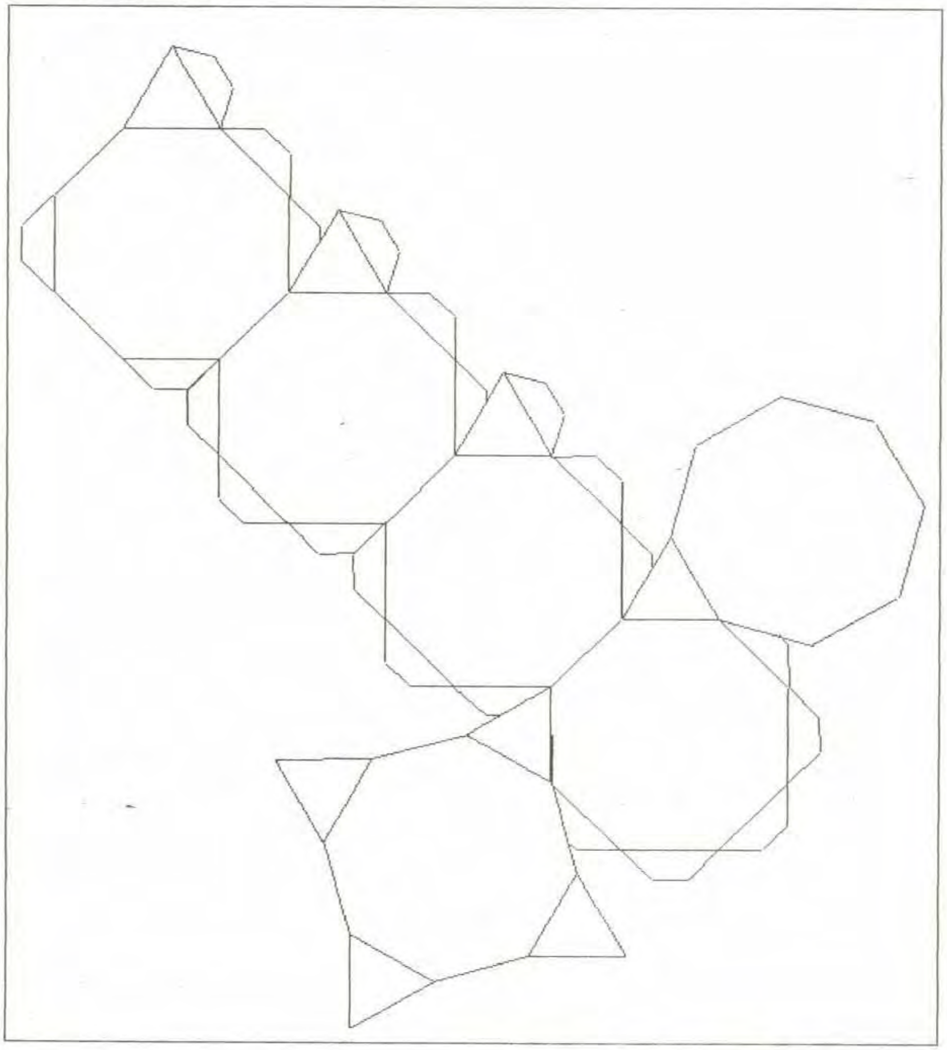
Pentagonal Prism



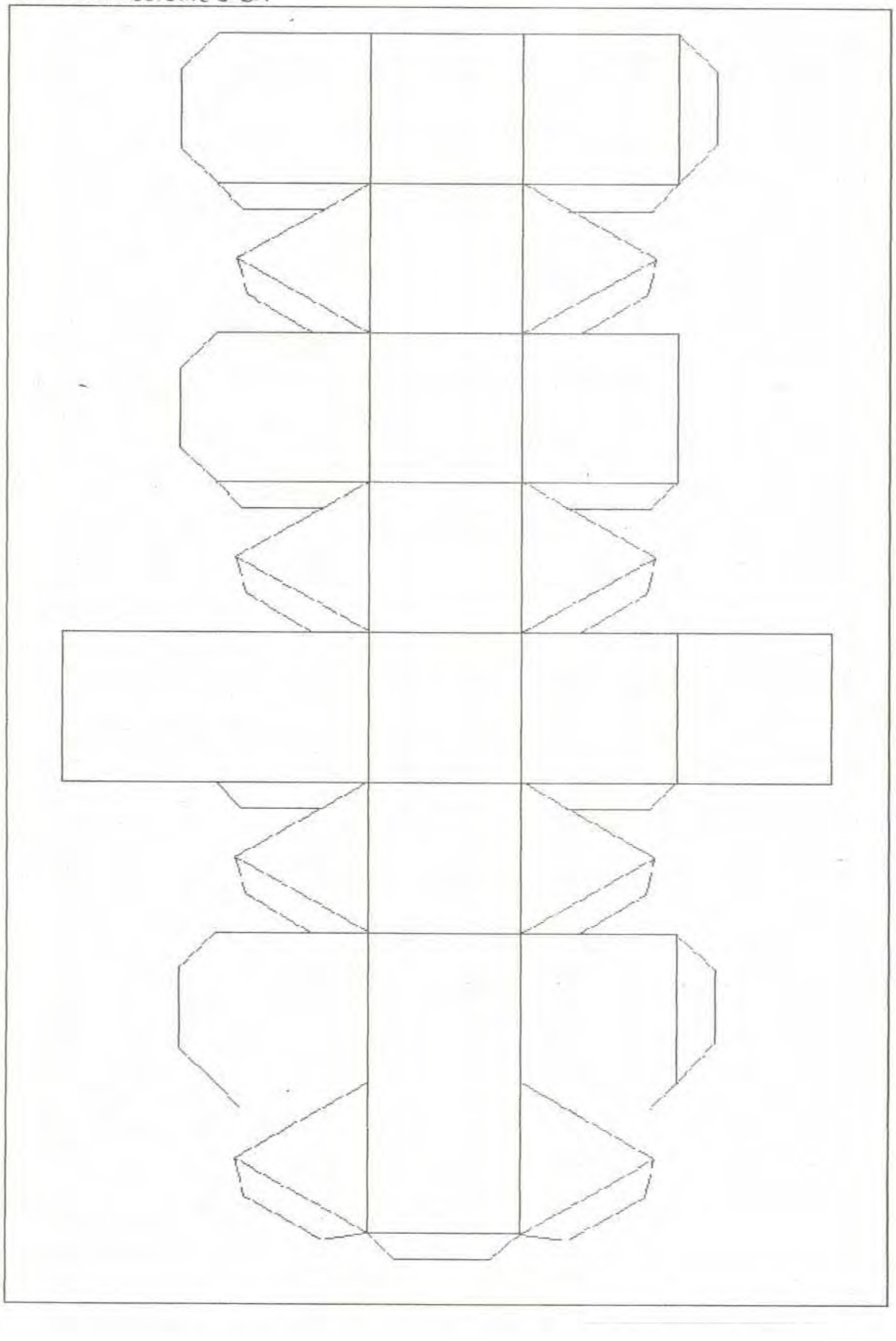
cube octahedron



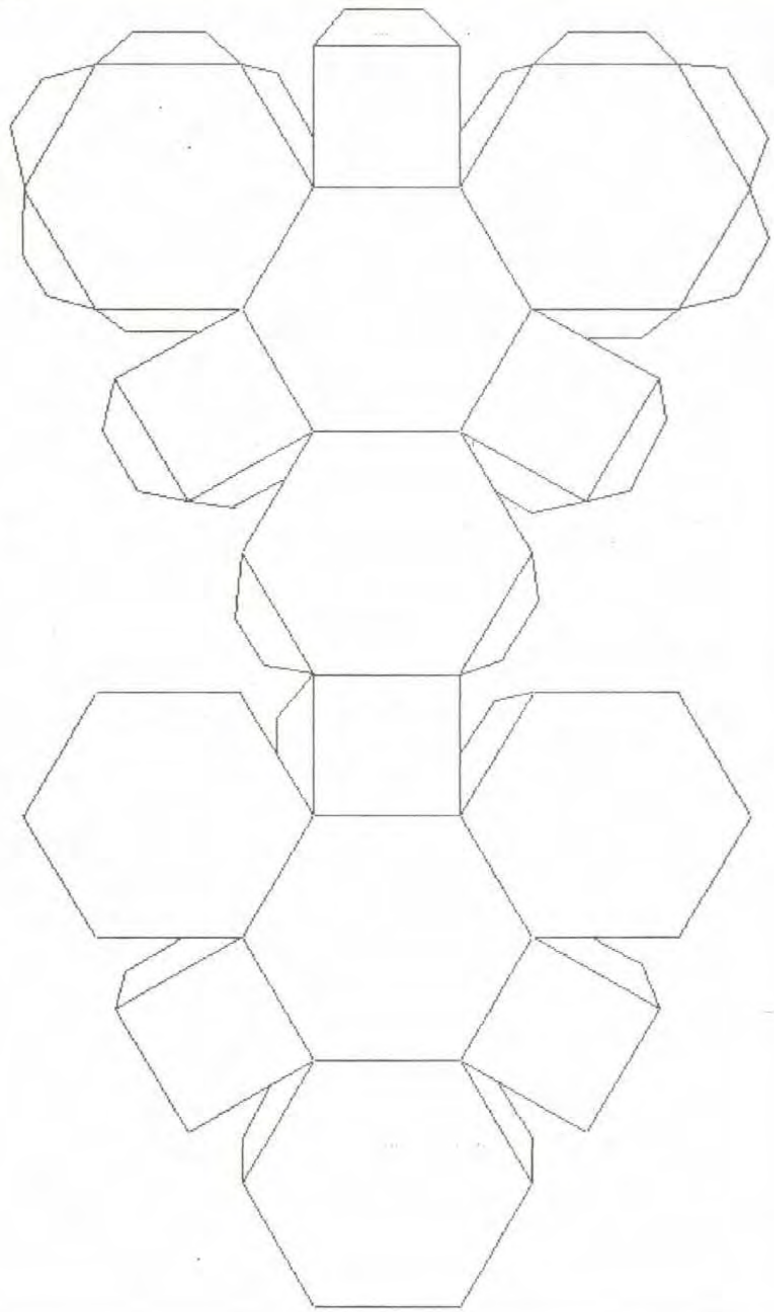
cubododecaedron2

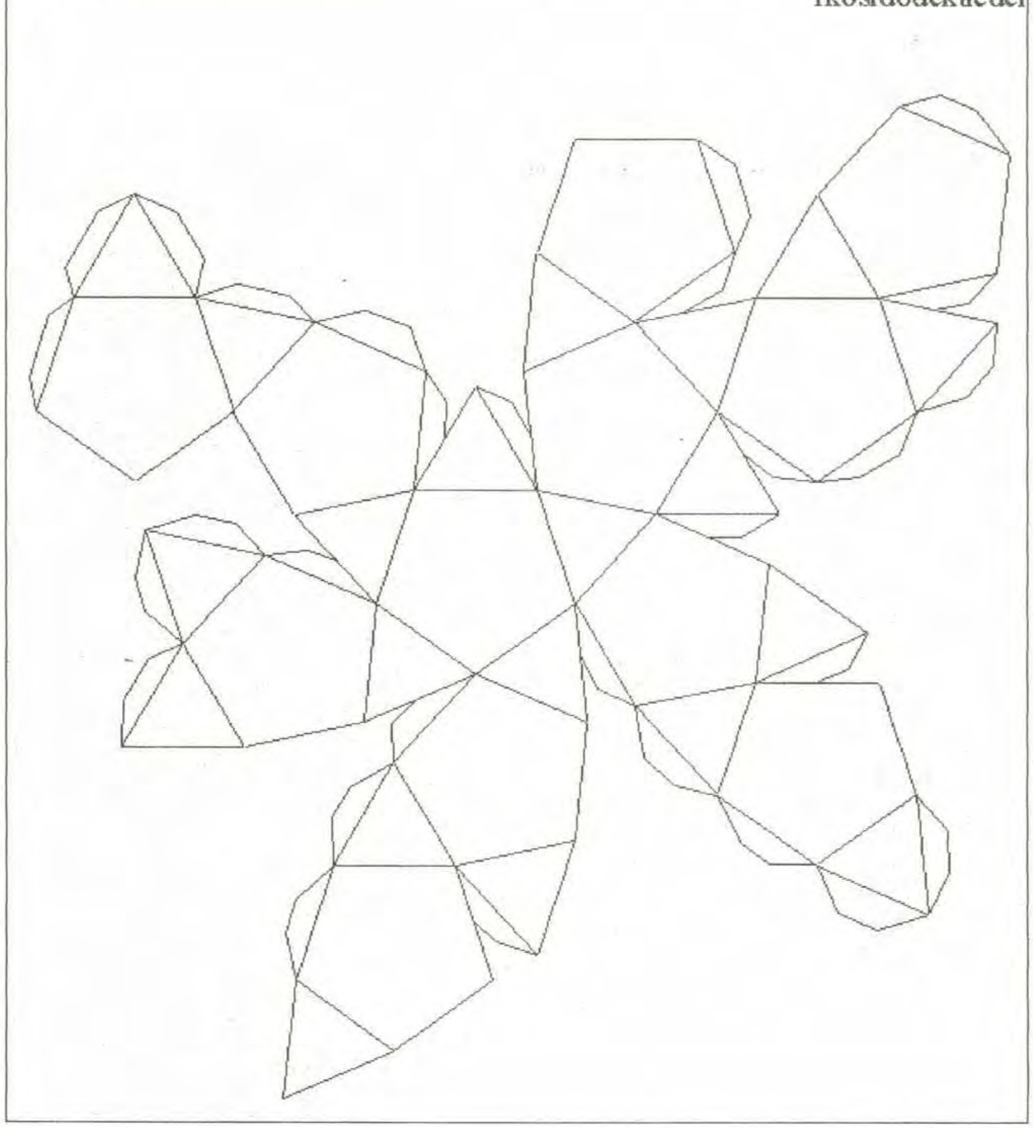


rombicuboctahedron



stompe oktaeder




ikosidodekaeder